2.2 Skalarprodukt, Vektorprodukt   [Lang & Pucker 5.3.2 (3.3.2)]

Wir betrachten Vektorfelder (wie $\nabla f(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$) in der Nähe von $\vec{r}=\vec{r}_0$. Die möglichen Werte von $\nabla f(\vec{r}_0)$, $\vec{E}(\vec{r}_0)$ usw. bilden einen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ (den „Tangentenraum" von $\vec{r}_0$). Seien $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\ldots$ Elemente aus diesem Raum.

Definition: (wie früher)

Ein Skalarprodukt (bzw. ein „inneres Produkt") ist eine Verknüpfung $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (MMP I, Kap. 3.2)

* $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ („kommutativ")
* $\vec{a}\cdot(\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})=\beta\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\gamma\,\vec{a}\cdot\vec{c}$ („linear")
* $|\vec{a}|^2:=\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$
* $|\vec{a}|^2=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$.

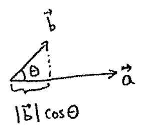
Es folgt $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) sowie

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

In einer orthonormalen Basis $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ gilt $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{k=1}^{3}a_kb_k$.

Geometrisch:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\underbrace{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\vec{b}}_{\text{Projektion von }\vec{b}\text{ in Richtung von }\vec{a}}=|\vec{a}|\underbrace{|\vec{b}|\cos\theta}$$



Man kann aber auch eine andere lineare Verknüpfung, diesmal $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definieren!

(Vgl. $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}$: Skalarprodukt $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ wäre $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2$, bzw. $\mathrm{Re}(z_1z_2^*)$.
Das komplexe Produkt (MMP I, Kap. 1.3) ist dagegen $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$,
$z_1\times z_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)$.)

Definition:

Ein Vektorprodukt (bzw. ein „Kreuzprodukt" bzw. ein „äußeres Produkt") ist eine Verknüpfung $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit den Eigenschaften

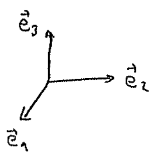
* $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ („antikommutativ" / „antisymmetrisch")

  Es folgt: $\vec{a}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

* $\vec{a}\times(\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})=\beta\,\vec{a}\times\vec{b}+\gamma\,\vec{a}\times\vec{c}$ („linear")

* In einer „rechtshändigen" orthonormalen Basis gilt:

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3$$
$$\vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1$$
$$\vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2$$



Es folgt: * $\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\times(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)\underbrace{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}_{\vec{e}_3} + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\underbrace{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}_{\vec{e}_1} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\underbrace{\vec{e}_3\times\vec{e}_1}_{\vec{e}_2}$$

$$\overset{!}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Determinante (MMPI, Kap. 3.3)

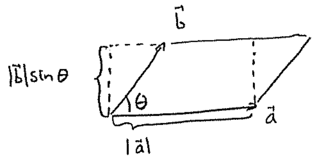
* $$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2$$

$$= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2$$
$$- 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \overset{!}{=} |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

D.h., $$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta| .$$

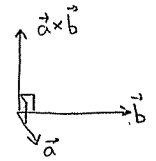
Geometrisch:



$\Rightarrow$ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ gibt die <u>Fläche</u> des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms an.

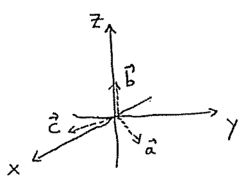
* $$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}$ ist <u>orthogonal</u> zu $\vec{a}$ <u>und</u> $\vec{b}$!
(und zwar rechtshändig)



<u>Beispiel</u>:

$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$
$\vec{b} = \vec{e}_z$



$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y) =: \vec{c}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}} = 1 .$$

Definition: Ein Spatprodukt ist eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

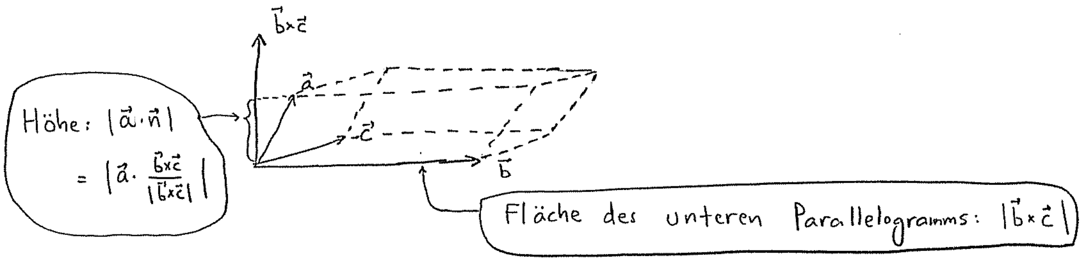
Behauptung 1: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$

Beweis: Benutze die bekannten Eigenschaften der Determinante. □

Behauptung 2: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, d.h. man kann „x" und „·" vertauschen.

Beweis: $\underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{Behauptung 1}} \underbrace{=}_{\text{Skalarprodukt ist kommutativ}} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ □.

Anwendung 1: $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ gibt das Volumen eines durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gebildeten „Parallelepipeds" (bzw. „Spats") an.



$$\text{Volumen} = \left| \vec{a} \cdot \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \right| \, |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| .$$

Anwendung 2: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$.

(Beweis: MMPI, Kap. 3.4)

Anschaulich: wenn in derselben Ebene (d.h. nicht linear unabhängig) verschwindet das Volumen.

Es gibt auch viele weitere Formeln mit Skalar- und Vektorprodukten; im Folgenden werden noch drei „Sätze" gegeben und begründet, eine im Allgemeinen benutzbare Methode wird aber erst im Kap. 2.4 eingeführt.

Satz 1: $\vec a \times (\vec b \times \vec c) = (\vec a \cdot \vec c)\vec b - (\vec a \cdot \vec b)\vec c$

(„Graßmann - Identität" für ein doppeltes Kreuzprodukt)
(Hermann Graßmann 1809 - 1877)

Beweis: $\vec a \times (\vec b \times \vec c)$ ist orthogonal zu $\vec a$, deshalb gilt unbedingt

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) = \beta\, \vec b + \gamma\, \vec c \quad , \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R} .$$

Nehme Skalarprodukt mit $\vec a$ auf beiden Seiten; die linke Seite wird zu

$$\vec a \cdot (\vec a \times (\vec b \times \vec c)) \underset{\text{Behauptung 2 auf Seite 9}}{=} (\vec a \times \vec a) \cdot (\vec b \times \vec c) \underset{\vec a \times \vec a = \vec 0}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = \beta\, \vec a \cdot \vec b + \gamma\, \vec a \cdot \vec c \quad \Rightarrow \begin{cases} \beta = \varkappa\ \vec a \cdot \vec c \\ \gamma = -\varkappa\ \vec a \cdot \vec b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec a \times (\vec b \times \vec c) = \varkappa \left[(\vec a \cdot \vec c)\vec b - (\vec a \cdot \vec b)\vec c \right] .$$

Wähle jetzt $\vec a = \vec e_1$, $\vec b = \vec e_1$, $\vec c = \vec e_2$; $\vec b \times \vec c = \vec e_3$

$$\underbrace{\vec e_1 \times \vec e_3}_{-\vec e_2} = \varkappa \left[\qquad - \vec e_2 \right] \quad \Rightarrow \varkappa = 1 \qquad \square .$$

Satz 2: $(\vec a_1 \times \vec a_2) \cdot (\vec b_1 \times \vec b_2) = \vec a_1 \cdot \vec b_1\ \vec a_2 \cdot \vec b_2 - \vec a_1 \cdot \vec b_2\ \vec a_2 \cdot \vec b_1$

(„Lagrange - Identität")
(Joseph-Louis de Lagrange 1736 - 1813)

Beweis:

$$(\vec a_1 \times \vec a_2) \cdot (\vec b_1 \times \vec b_2) \underset{\text{Behauptung 2 auf Seite 13}}{=} \vec a_1 \cdot (\vec a_2 \times (\vec b_1 \times \vec b_2)) \underset{\text{Satz 1}}{=} \vec a_1 \cdot \left((\vec a_2 \cdot \vec b_2)\vec b_1 - (\vec a_2 \cdot \vec b_1)\vec b_2 \right) \qquad \square$$

Satz 3: $\vec a \times (\vec b \times \vec c) + \vec b \times (\vec c \times \vec a) + \vec c \times (\vec a \times \vec b) = \vec 0$

(„Jacobi - Identität")
(Carl Gustav Jacob Jacobi 1804 - 1851)

Beweis: Benutze Satz 1 :

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) + \vec b \times (\vec c \times \vec a) + \vec c \times (\vec a \times \vec b) = (\vec a \cdot \vec c)\vec b - (\vec a \cdot \vec b)\vec c + (\vec b \cdot \vec a)\vec c - (\vec b \cdot \vec c)\vec a + (\vec c \cdot \vec b)\vec a - (\vec c \cdot \vec a)\vec b$$

$\square$

Bemerkung: $\vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = (\vec a \times \vec b) \cdot \vec c$ (Behauptung 2)

aber

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) \neq (\vec a \times \vec b) \times \vec c \quad !$$

—— ∘ —— ∘ ——