2. Analysis in drei Dimensionen

2.1 Partielle Ableitung, Gradient [Lang & Pucker 7.4]

Als Verallgemeinerung vom Kapitel 1.1 wird jetzt eine Funktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ betrachtet. Sei f „glatt genug", d.h. stetig und (evtl. n-mal) total differenzierbar (vgl. Seite 2):

$$f(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - f(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} + |\Delta\vec{r}|\, O(\Delta\vec{r}) .$$

Wie durch die Wahl $\Delta\vec{r} = \varepsilon\,\vec{e}_k$, $k \in \{1,2,3\}$, gesehen werden kann, sind die Komponenten von $\vec{a}(\vec{r})$ die partiellen Ableitungen (vgl. Seite 2):

$$a_k(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\vec{r}+\varepsilon\,\vec{e}_k) - f(\vec{r})}{\varepsilon} =: \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k} \quad ; \quad x_1 := x,\ x_2 := y,\ x_3 := z .$$

Eine alternative Bezeichnung: $\partial_k f(\vec{r}) := \dfrac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_k}$, $k \in \{1,2,3\}$.

Der ganze Vektor $\vec{a}(\vec{r})$ wird „Gradient" von f genannt, und als

$$\vec{a}(\vec{r}) =: \nabla f(\vec{r})$$

bezeichnet. Hier ist ∇ der „Nabla-Operator":

$$\nabla := \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_k \vec{e}_k\, \partial_k \quad (= \vec{\nabla} = \text{grad}) .$$

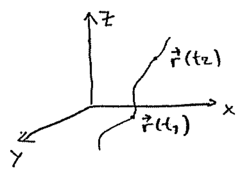
Also kurz:

$$\boxed{f(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = f(\vec{r}) + \Delta\vec{r} \cdot \nabla f(\vec{r}) + \mathcal{O}(|\Delta\vec{r}|^2)} ,$$

wobei „$\mathcal{O}(|\Delta\vec{r}|^2)$" in der Regel als „verschwindet mindestens so schnell wie $|\Delta\vec{r}|^2$" interpretiert werden kann (vgl. Aufgabe 1.4).

— o —

Sei $\vec{r}(t)$ eine Raumkurve, $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, und $f(\vec{r})$ ein Feld (z.B. die Temperatur), $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.



Die Komposition $f(\vec{r}(t))$ ist eine Abbildung $f \circ \vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, z.B. die Temperatur entlang der Raumkurve als Funktion der Zeit.

Was ist $\dfrac{df(\vec{r}(t))}{dt}$?

Kettenregel (MMP I, Kap. 2.1): $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$.

Jetzt: $\dfrac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \dfrac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \dfrac{d}{dt} f(\{x_k(t)\})$.

(i) $x_k(t)$ differenzierbar $\Rightarrow$ $x_k(t+\Delta t) = x_k(t) + \underbrace{\dfrac{dx_k(t)}{dt}\Delta t}_{=:\,\Delta x_k} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$

(ii) f differenzierbar $\Rightarrow$ $f(\{x_k + \Delta x_k\}) = f(\{x_k\}) + \sum_k \Delta x_k\, \partial_k f + \mathcal{O}(|\Delta\vec{x}|^2)$.

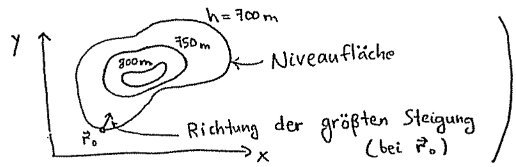
Kombiniert:
$$\frac{df(\{x_k\})}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(\{x_k(t+\Delta t)\}) - f(\{x_k(t)\})}{\Delta t}$$
$$\overset{(i)}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(\{x_k+\Delta x_k\}) - f(\{x_k\})}{\Delta t}$$
$$\overset{(ii)}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sum_k \Delta x_k\,\partial_k f + \mathcal{O}(|\Delta\vec{x}|^2)}{\Delta t}$$
$$\overset{(i)}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sum_k \partial_k f\,\frac{dx_k}{dt}\,\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)}{\Delta t} = \boxed{\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}}\,.$$
$$\left(= \nabla f\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

Diese Formel stellt eine Verallgemeinerung der Kettenregel zu mehreren Variablen dar.

Anwendungen:

Ein skalares Feld $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definiert „Niveauflächen" (bzw. Äquipotentialflächen), auf denen f konstant bleibt, sowie die „Richtung der größten Änderung" von f.

(Für $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ können diese durch die Höhenlinien einer topographischen Karte illustriert werden:



)

(i) Die Richtung der größten Änderung ist genau die Richtung von ∇f.

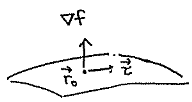
Beweis: Sei $\vec{r}(t) := \vec{r}_0 + t\vec{n}$ eine Gerade durch $\vec{r}_0$, und $\vec{n}$ ein Einheitsvektor, d.h. $|\vec{n}| = 1$.

Die Änderungsrate in Richtung $\vec{n}$:
$$\frac{df(\vec{r}_0+t\vec{n})}{dt} = \nabla f(\vec{r}_0)\cdot\frac{d(\vec{r}_0+t\vec{n})}{dt} = \vec{n}\cdot\nabla f(\vec{r}_0)$$
$$= |\vec{n}|\,|\nabla f|\cos\theta$$

Weil $-1\le\cos\theta\le 1$ gilt, ist $\left|\frac{df}{dt}\right|$ maximal bei $|\cos\theta| = 1$, d.h. $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$, d.h. $\vec{n}\parallel\nabla f$ ($\uparrow\uparrow$ oder $\uparrow\downarrow$) $\square$.

(ii) Der Gradient $\nabla f(\vec{r}_0)$ steht senkrecht auf die Niveaufläche durch $\vec{r}_0$.

Beweis: Sei $\vec{\tau}$ ein Tangentenvektor der Niveaufläche:



Weil f konstant auf der Niveaufläche bleibt, gilt
$$0 = \frac{df(\vec{r}_0+t\vec{\tau})}{dt} = \vec{\tau}\cdot\nabla f(\vec{r}_0) = |\vec{\tau}||\nabla f|\cos\theta\,,$$
d.h. $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, d.h. $\vec{\tau}\perp\nabla f$ $\square$.
(falls $\nabla f \neq \vec{0}$!)