

# 1. Einleitung

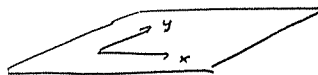
## 1.1 Mehr als eine Dimension

[Lang & Pucker 7.1]

In MMP I waren die Funktionen in der Regel der Form  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Jetzt betrachten wir einen Raum mit (vorerst) zwei Koordinaten, d.h.  $\mathbb{R}^2$ .

z.B. Oberfläche



$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad \text{bzw.} \quad \vec{r} = (x, y)$$

Welche Arten von Funktionen könnten hier eine physikalische Rolle spielen?

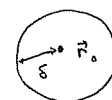
- ein „skalares“ Feld (d.h. ohne Richtung), z.B. die Temperatur  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .
- ein „Vektorfeld“ (zeigt in eine Richtung), z.B. elektrisches Feld  $\vec{E}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- eine Raumkurve eines Massenpunktes,  $\vec{r}(t)$ , d.h.  $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Wenn wir die Komponenten von  $\vec{E}$  bzw.  $\vec{r}(t)$  einzeln betrachten, dann ist die wesentliche Neugierkeit eine Abbildung der Form  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , und wir beschränken uns für den Moment auf diesen Fall.

⇒ Wie werden die Grundbegriffe der Analysis (Grenzwert, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, ...) auf den Fall  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  erweitert?

Definition:  $\delta$ -Umgebung von  $\vec{r}_0$ :

$$U_\delta(\vec{r}_0) := \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta \}$$

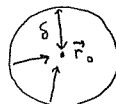


wobei  $|\vec{r} - \vec{r}_0| := \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}$  (Pythagoras)

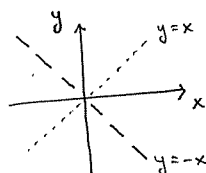
Definition:  $f(\vec{r})$  hat bei  $\vec{r} = \vec{r}_0$  den Grenzwert  $f_0$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(\vec{r}) - f_0| < \epsilon \quad \text{falls} \quad \vec{r} \in U_\delta(\vec{r}_0).$$

Bemerkung: Der Grenzwert muss unabhängig davon sein, aus welcher Richtung man kommt:



Gegenbeispiel:  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  bei Ursprung



$$y = x \Rightarrow f = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = +\frac{1}{2}$$

$$y = -x \Rightarrow f = \frac{-x^2}{x^2 + x^2} = -\frac{1}{2}$$

⇒  $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{r})$  existiert nicht!

Definitionen:

\*  $f(\vec{r})$  ist stetig bei  $\vec{r} = \vec{r}_0 \iff \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0)$ .

\*  $f(\vec{r})$  ist stetig auf einem Definitionsbereich  $D \iff f$  stetig  $\forall \vec{r} \in D$ .

Definition:

$f(\vec{r})$  ist differenzierbar bei  $\vec{r} = \vec{r}_0$

$\iff f(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) - f(\vec{r}_0) = \vec{a}(\vec{r}_0) \cdot \Delta\vec{r} + |\Delta\vec{r}| \mathcal{O}(\Delta\vec{r})$ ,

wobei  $\lim_{\Delta\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \mathcal{O}(\Delta\vec{r}) = 0$  gilt.

Bemerkungen:

Diese Eigenschaft, auch die „totale“ Differenzierbarkeit genannt, verlangt wieder, dass  $\Delta\vec{r}$  in eine beliebige Richtung zeigen kann.

Wenn wir dagegen eine besondere Koordinate wählen, und die anderen festhalten, funktioniert alles wie in einer Dimension; es geht dann um eine „partielle Ableitung“:

$f(\vec{r}_0 + \epsilon \vec{e}_1) - f(\vec{r}_0) = \frac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial x} \epsilon + \epsilon \mathcal{O}_1(\epsilon)$

$f(\vec{r}_0 + \epsilon \vec{e}_2) - f(\vec{r}_0) = \frac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial y} \epsilon + \epsilon \mathcal{O}_2(\epsilon)$ ,

wobei  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{O}_i(\epsilon) = 0$  gilt, für  $i=1,2$ .

Totale Differenzierbarkeit impliziert die Existenz der partiellen Ableitungen:

$\Delta\vec{r} := \epsilon \vec{e}_1 \implies a_1(\vec{r}_0) = \frac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial x}$

$\Delta\vec{r} := \epsilon \vec{e}_2 \implies a_2(\vec{r}_0) = \frac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial y}$

Es funktioniert aber nicht unbedingt in die umgekehrte Richtung.

Gegenbeispiel:

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$  ;  $f(0,0) := 0$ .

$x=0 \implies f=0 \forall y \implies \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \forall y$

$y=0 \implies f=0 \forall x \implies \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \forall x$

Jedoch ist  $f$  bei Ursprung nicht einmal stetig (vgl. Seite 1).

Fazit:

Wenn es mehrere Dimensionen gibt, ist „Ableitung“ nicht eindeutig, sondern viele Möglichkeiten stehen zur Verfügung. Dasselbe gilt auch für Integration. – mehr dazu im Kap. 2!