Übungen zu MMP I	**Zusatzblatt zu Differenzialgleichungen**	18.12.2013

[Keine Abgabe — zum Selbststudium.]

Lösungen der Aufgaben 6.X können auf der folgenden Webseite gefunden werden:
`http://physik.uni-graz.at/~cbl/mm/mm-Aufgaben.php?section=6`

Aufgabe 0: Lineare Differenzialgleichung erster Ordnung. Wir betrachten die Differenzialgleichung

$$y'(x) + p\,y(x) = E\sin(x)\ .$$

(a) Bestimmen Sie, mit Hilfe des Ansatzes $y = e^{rx}$, die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' + py = 0$. [Antwort: $y_a(x) = C_1 e^{-px}$.]

(b) Die homogene Gleichung kann auch als

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -p\,y(x)$$

ausgedrückt werden. Lösen Sie diese wie eine separierbare DG und verifizieren Sie, dass dieselbe Lösung wie in Aufgabe (a) gefunden werden kann.

(c) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung mittels des Ansatzes $y_s(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$. [Antwort: $y_s(x) = \frac{E}{1+p^2}(p\sin x - \cos x)$.]

(d) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = y_a(x) + y_s(x)$. Fixieren Sie den Koeffizienten C_1 durch die Anfangsbedingung $y(0) = 0$. [Antwort: $C_1 = E/(1 + p^2)$.]

Aufgabe 6.6: Separierbare Differenzialgleichung erster Ordnung. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos y}\ , \quad y(0) = 0\ .$$

Aufgabe 6.10: Exaktes Differenzial. Zeigen Sie, dass die Differenzialgleichung

$$\big[2xe^y + y\cos(x\,y)\big]\mathrm{d}x + \big[x^2e^y + x\cos(x\,y)\big]\mathrm{d}y = 0$$

ein exaktes Differenzial ist, und ermitteln Sie ihre Lösung als implizite Funktion.

Aufgabe 6.13c: Differenzialgleichung vom homogenen Typ. Lösen Sie die homogene Differenzialgleichung

$$y'(x) = \frac{3x}{y(x)} - \frac{y(x)}{x}$$

durch die Substitution $y(x) = x\,u(x)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 6.16: Substitution der Variablen. Lösen Sie die nichtlineare Differenzialgleichung

$$y'(x) = \big[x + y(x)\big]^2$$

durch die Substitution $u(x) = x + y(x)$.

Aufgabe 6.24: Lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - y(x) = x + \cos x\ , \quad y(0) = \frac{1}{2}\ , \quad y'(0) = 0\ .$$

In der Prüfung (14.01.2014 um 9:15 - 11:45 Uhr im A6) sind keine Hilfsmittel erlaubt, aber die folgende Tabelle wird auf dem Prüfungsblatt gegeben:

$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0$	$\frac{\mathrm{d}\sinh x}{\mathrm{d}x} = \cosh x$	$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$	$\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$
$\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$	$\frac{\mathrm{d}\cosh x}{\mathrm{d}x} = \sinh x$	$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x$	$\det(AB) = \det(A)\det(B)$
$\frac{\mathrm{d}\ln\lvert x\rvert}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$	$\frac{\mathrm{d}\tanh x}{\mathrm{d}x} = 1-\tanh^2 x$	$\frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}x} = 1+\tan^2 x$	$(AB)^T = B^T A^T$
$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}x} = \mu\, x^{\mu-1}$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arsinh}\, x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$\frac{\mathrm{d}\exp\phi(x)}{\mathrm{d}x} = \phi'(x)e^{\phi(x)}$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arcosh}\, x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{\mathrm{d}\arccos x}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Sp}(A))$
$\frac{\mathrm{d}\ln\lvert\phi(x)\rvert}{\mathrm{d}x} = \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{artanh}\, x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-x^2}$	$\frac{\mathrm{d}\arctan x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$	$\ln(\det(B)) = \mathrm{Sp}(\ln(B))$