Übungen zu MMP I	**Blatt Nr. 12**

[Tutorium 05.12., Abgabe 12.12.]

Aufgabe 1: Eigenwerte und Eigenvektoren. Ermitteln Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren folgender Matrizen (jeweils 2 Punkte):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0\,; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0\,; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Reelle und imaginäre Eigenwerte.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte folgender Matrizen (jeweils 2 Punkte):

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

(b) Verifizieren Sie anhand dieser Beispiele (ggf. durch eine angemessene Wahl von ϕ), dass eine symmetrische Matrix reelle und eine antisymmetrische Matrix rein imaginäre Eigenwerte hat (2 Punkte).

Aufgabe 3: Funktionen von Matrizen. Eine Matrix M besitze die Eigenwerte λ_i und die entsprechenden Eigenvektoren $v^{(i)}$.

(a) Betrachtet wird eine Funktion $f(M) := \sum_n a_n M^n$. Zeigen Sie, dass $f(M)$ die gleichen Eigenvektoren wie M hat, aber jeweils mit den Eigenwerten $f(\lambda_i)$ (3 Punkte).

(b) Zeigen Sie, dass falls M regulär ist, die Inverse M^{-1} auch die gleichen Eigenvektoren wie M hat, aber jeweils mit den Eigenwerten λ_i^{-1} (3 Punkte).

Aufgabe 4: Matrizen in der Quantenmechanik. In der Quantenmechanik werden physikalische Größen („Observablen") durch symmetrische (bzw. hermitesche) Matrizen dargestellt, und die möglichen Messwerte sind die dazu gehörigen Eigenwerte. Ein „Absteigeoperator", A; ein „Aufsteigeoperator", A^T; und zwei „Zustände", $|0\rangle, |1\rangle$; seien wie folgt definiert:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifizieren Sie die folgenden Identitäten (2 Punkte):

$$A\,|1\rangle = |0\rangle\,, \quad A\,|0\rangle = 0\,, \quad A^T\,|0\rangle = |1\rangle\,, \quad A^T\,|1\rangle = 0\,.$$

(b) Ein „Antikommutator"wird als $\{A, B\} = AB + BA$ definiert. Verifizieren Sie die folgende „Algebra" (2 Punkte):

$$\{A, A\} = \{A^T, A^T\} = 0\,, \quad \{A, A^T\} = \{A^T, A\} = \mathbb{1}\,.$$

(c) Ein „Besetzungszahloperator" wird als $N = A^T A$ definiert. Als symmetrische Matrix hat N reelle Eigenwerte, die die Teilchenzahl des jeweiligen Zustandes darstellen. Wieviele Teilchen sind in den Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ zu finden?

[Dieses System entspricht einem „Fermion", das dem „Paulischen Ausschlussprinzip" genügt.]