Übungen zu MMP I	**Blatt Nr. 11**

[Tutorium 28.11., Abgabe 05.12.]

Aufgabe 1: Gauß-Jordan-Algorithmus. Bestimmen Sie die Inverse der 2×2-Matrix M,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} ,$$

mittels des Gauß-Jordan-Algorithmus (6 Punkte).

Aufgabe 2: Inverse Matrix. Ermitteln Sie die Inverse der Matrix

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

und überprüfen Sie das Ergebnis durch die Berechnung der Matrix $M\,M^{-1}$ (6 Punkte).

Aufgabe 3: Lineare Gleichungssysteme. Ermitteln Sie die Lösungen (d.h. x, y, z) des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(6 Punkte)} .$$

Aufgabe 4: Quadratische Formen. Ein sogenanntes Gaußsches Integral,

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, e^{-a\,x^2 + 2\,b\,x} , \quad a > 0 ,$$

kann durch die Substitution $x = y + b/a$ vereinfacht werden. Wir verallgemeinern das Argument der Exponentialfunktion zu

$$\phi(x) := -x^T A\,x + x^T b + b^T x ,$$

wobei A eine reguläre und symmetrische $n \times n$-Matrix ist, und x, b Spaltenvektoren bezeichnen (die Struktur $x^T A\,x$ wird „quadratische Form“genannt).

(a) Zeigen Sie, dass A^{-1} ebenfalls symmetrisch ist, d.h. die Gleichung $(A^{-1})^T = A^{-1}$ erfüllt (2 Punkte). [Hinweis: Betrachten Sie das Produkt $(A^{-1})^T A$.]

(b) Ermitteln Sie einen Spaltenvektor c, so dass nach der Substitution $x = y + c$ keine Terme linear in y übrig bleiben (2 Punkte). [Antwort: $c = A^{-1} b$.]

(c) Ermitteln Sie ebenfalls die Form der Funktion ϕ, nachdem die Variable x durch y ersetzt worden ist (2 Punkte). [Antwort: $\phi = -y^T A\,y + b^T A^{-1}\,b$.]