Übungen zu MMP I **Blatt Nr. 10**

[Tutorium 21.11., Abgabe 28.11.]

Aufgabe 1: Verschiedene Arten von Matrizen. Ermitteln Sie die allgemeinste reelle 2×2-Matrix M,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} ,$$

mit der folgenden Eigenschaft:

(a) M sei symmetrisch, d.h. $M^T = M$ (1 Punkt);

(b) M sei antisymmetrisch, d.h. $M^T = -M$ (1 Punkt);

(c) M sei spurlos, d.h. $\mathrm{Sp}\, M = 0$ (1 Punkt);

(d) M habe verschwindende Determinante, d.h. $\det M = 0$ (1 Punkt);

(e) M sei orthogonal, d.h. $M^T M = \mathbb{1}$ (2 Punkte).

Aufgabe 2: Orthogonale Matrix.

(a) In der Vorlesung wurde eine orthogonale Matrix, sei es O, durch die Gleichung $O^T O = \mathbb{1}$ definiert. Zeigen Sie, dass eine orthogonale Matrix die Gleichung

$$O\, O^T = \mathbb{1}$$

ebenfalls erfüllt (3 Punkte). [Hinweis: Sei $w = Ov$. Zeigen Sie zuerst, dass v als $v = O^T w$ ausgedrückt werden kann.]

(b) In der Aufgabe 9.3 wurde eine zweidimensionale Drehmatrix betrachtet,

$$D := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass diese die Gleichungen $D^T D = D D^T = \mathbb{1}$ erfüllt (3 Punkte).

Aufgabe 3: Allgemeine Eigenschaften von Determinanten. Seien A, B 2×2-Matrizen. Verifizieren Sie durch explizite Berechnung die folgenden Identitäten:

(a) $\det A^T = \det A$ (1 Punkt).

(b) $\det(AB) = \det(A)\, \det(B)$ (3 Punkte).

Sei O eine allgemeine orthogonale Matrix. Verifizieren Sie die Gültigkeit der folgenden Identität:

(c) $|\det O| = 1$ (2 Punkte).

Aufgabe 4: Explizite Evaluationen von Determinanten. Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen (jeweils 2 Punkte):

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} , \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} , \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$