Übungen zu MMP I	**Blatt Nr. 09**

[Tutorium 07.11., Abgabe 14.11.]

Aufgabe 1: Vektorraum und Skalarprodukt.

(a) Sind die Vektoren $\vec{v}_1 = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z$, $\vec{v}_2 = 2\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3\vec{e}_z$, $\vec{v}_3 = -2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$ linear unabhängig (3 Punkte)? [Hinweis: Inspizieren Sie, ob die Gleichung $\sum_{i=1}^{3} a_i\vec{v}_i = \vec{0}$ nicht-triviale Lösungen hat.]

(b) Seien $\vec{v} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{w} = -\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$. Was ist der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ (3 Punkte)? [Hinweis: $\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{w}/(|\vec{v}|\,|\vec{w}|)$.]

Aufgabe 2: Konstruktion einer orthogonalen Basis. Drücken Sie den Vektor $\vec{v} := \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z$ als Summe zweier Vektoren aus, $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$, wobei $\vec{v}_\parallel$ parallel zu $\vec{w} := 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ ist, während $\vec{v}_\perp$ orthogonal zu $\vec{w}$ sein soll (6 Punkte).

Aufgabe 3: Zweidimensionale Drehungen als lineare Abbildungen. Ein Einheitsvektor in der (x, y)-Ebene, der einen Winkel ϕ_1 bzgl. der x-Achse aufweist, kann als $\vec{v} = \cos\phi_1\,\vec{e}_x + \sin\phi_1\,\vec{e}_y$ dargestellt werden. Eine Drehung durch den Winkel θ liefert den Vektor $\vec{w} = \cos\phi_2\,\vec{e}_x + \sin\phi_2\,\vec{e}_y$, mit $\phi_2 = \phi_1 + \theta$.

(a) Zeigen Sie, dass die Drehung in Matrixform als

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi_1 \\ \sin\phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_2 \\ \sin\phi_2 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann (3 Punkte).

(b) Verifizieren Sie die folgende Identität für die Komposition zweier Drehungen (3 Punkte):

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4: Algebra von Matrizen. Die „Pauli-Matrizen“ werden als

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

definiert, wobei i die Imaginäreinheit ist (d.h. $i^2 := -1$). Ein „Kommutator“ wird als $[A, B] := A\,B - B\,A$ definiert. Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen die folgende „Algebra“ erfüllen:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3 \ , \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1 \ , \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2 \qquad \text{(6 Punkte)} .$$