

Aufgabe 1: Lineare Differenzialgleichungen mit inhomogenen Termen. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender linearen Differenzialgleichungen:

- (a) $y'' - 2y' + y = e^{-x}$ (2 Punkte). [Antwort: $C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{4} e^{-x}$.]
 (b) $y'' - 2y' + y = e^x$ (2 Punkte). [Antwort: $C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$.]
 (c) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ (2 Punkte). [Antwort: $C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x \ln |\sin x| - x \cos x$. Hinweis: Konstanten variieren, oder die entsprechenden Formeln aus der Vorlesung benutzen!]

Aufgabe 2: Gedämpfte Schwingungen. In der Kosmologie spielt die folgende Gleichung eine wichtige Rolle:

$$\ddot{\varphi}(t) + 3H\dot{\varphi}(t) + m^2\varphi(t) = 0 .$$

- (a) Sei zuerst H eine Konstante, $H := 2/(3t_0)$, $t_0 > 0$. Für welche m (sei $m > 0$) gibt es Lösungen mit Schwingungen (2 Punkte)?
 (b) Sei jetzt H eine Funktion der Zeit, $H := 2/(3t)$, $t > 0$. Führen Sie die Substitution $\varphi = \chi/t$ durch; welche DG erfüllt χ ? Für welche m gibt es Schwingungen (4 Punkte)?

Aufgabe 3: Resonante Schwingungen. Ein ungedämpfter harmonischer Oszillator wird durch eine äußere Kraft getrieben,

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = E \sin(\omega t) .$$

- (a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung für den Fall $\omega \neq \omega_0$ (2 Punkte).
 (b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung für den Fall $\omega = \omega_0$ (2 Punkte).
 [Antwort: $C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) - \frac{Et}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t)$.]
 (c) Skizzieren Sie die Letztere für die Anfangsbedingungen $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ (2 Punkte).

Aufgabe 4: Nichtlineare DG zweiter Ordnung als separierbare DG erster Ordnung. Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 + y^2} .$$

- (a) Eine neue abhängige Variable wird als $z = y'$ definiert. Leiten Sie eine DG für z her, und ermitteln Sie z als Funktion von y (2 Punkte). [Antwort: $z(y) = C_1(1 + y^2)$.]
 (b) Bestimmen Sie die entsprechende $y(x)$ (2 Punkte). [Antwort: $y(x) = \tan(C_1 x + C_2)$.]
 (b) Fixieren Sie die Integrationskonstanten C_1, C_2 durch die Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = 4$ (2 Punkte).

[Bitte bemerken Sie, dass die Integrationskonstanten im nichtlinearen Fall anders auftauchen als im linearen Fall, vgl. Aufgabe 1. Ihre Anzahl bleibt aber unverändert.]