Übungen zu MMP I	**Blatt Nr. 07**

[Tutorium 31.10., Abgabe 07.11.]

Aufgabe 1: Lösung der linearen DG erster Ordnung. Ein Massenpunkt (Masse m) bewege sich mit Geschwindigkeit v im homogenen Schwerefeld ($g \approx 9.8$ m/s^2). Wegen Luftreibung ($\gamma = \text{const}$) hat die Newtonsche Bewegungsgleichung die Form

$$\dot{v}(t) = -\frac{\gamma}{m} v(t) - g \; .$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung (3 Punkte).

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung $v(t_0) = v_0$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte).

(c) Berechnen Sie noch die Bahnkurve, $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, v(t')$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte).

Aufgabe 2: Variation der Konstanten. Die Langevin-Gleichung beschreibt die Bewegung eines schweren Massenpunktes (z.B. Staub in der Luft), der mit leichteren Teilchen wechselwirkt (z.B. Stickstoffmoleküle). Dabei entsteht Reibung, aber manchmal auch Beschleunigung: die Form der Bewegungsgleichung ist $\dot{p}(t) = -\eta \, p(t) + \xi(t)$, wobei $p(t)$ den Impuls und $\xi(t)$ eine stochastische Kraft bezeichnen.

(a) Bestimmen Sie die allegemeine Lösung durch Variation der Konstanten (4 Punkte).

(b) Die Integrationskonstante wird durch den bekannten Wert von p am Zeitpunkt $t = 0$, $p(0)$, fixiert. Ermitteln Sie die entsprechende spezielle Lösung (2 Punkte).
[Antwort: $p(t) = p(0) e^{-\eta t} + \int_0^t \mathrm{d}t' \, e^{\eta(t'-t)} \xi(t')$.]

Aufgabe 3: Separierbare nichtlineare Differenzialgleichungen erster Ordnung.

(a) Die elektromagnetische „Feinstrukturkonstante“, α, ist eine Funktion der „Energie“, E, und erfüllt die Gleichung

$$E \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}E} = \frac{56}{27\pi} \alpha^2 \; .$$

Bei $E = 0.511$ MeV gilt $\alpha \approx 1/137$. Bestimmen Sie α bei $E = 10^6$ MeV (3 Punkte).

(b) Die Temperatur des Universums, T, ist eine Funktion der Zeit, t, und erfüllt die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -c T^3 \; , \quad c = \text{const.}$$

Heute ($t = 14 \times 10^9$ y) sei $T = 3$ K. Wann war $T = 10^4$ K (3 Punkte)? [Die Integrationskonstante wird so fixiert, dass $T \to \infty$ bei $t \to 0$.]

Aufgabe 4: Homogener Typ, Exaktes Differenzial, Bernoulli-Form. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differenzialgleichungen (jeweils 2 Punkte):

$$\text{(a)} \quad y' = \frac{y}{x} + e^{-y/x} \; , \quad \text{(b)} \quad y' = -\frac{2x + y^2}{2xy} \; , \quad \text{(c)} \quad y' + xy = y^3 \; .$$

[Hinweis (c): Sie dürfen $\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{d}s \, e^{-s^2}$ als Bestandteil der Antwort anwenden.]