Übungen zu MMP I — Blatt Nr. 06

[Tutorium 24.10., Abgabe 31.10.]

Aufgabe 1: Substitution der Variablen. Berechnen Sie Folgendes (jeweils 1 Punkt):

(a) $\int_0^1 \mathrm{d}x\, \sqrt{1-x^2}$ durch $x = \sin t$;

(b) $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x}$ durch $x = -\ln(t)$;

(c) $\int^x \frac{\mathrm{d}y\, y}{1+y^4}$ durch $y^2 = t$;

(d) $\int^x \frac{\mathrm{d}y}{e^y + e^{-y}}$ durch $e^y = t$;

(e) $\int^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y(1-y)}}$ durch $y = \frac{1}{1+t^2}$;

(f) $\int^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y(1+y)}}$ durch $y = t^2$.

Aufgabe 2: Partielle Integration.

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale: $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, x^2 \ln x$, $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, x^2 \sinh x$ (3 Punkte).

(b) Berechnen Sie $I_n := \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{2n+1} e^{-ax^2}$, mit $a > 0$ und $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ (3 Punkte).
[Hinweis: Leiten Sie eine Rekursionsgleichung her, und bestimmen Sie I_0 explizit.]

Aufgabe 3: Partialbruchzerlegung.

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale (jeweils 2 Punkte):

$$\int^x \frac{\mathrm{d}y}{y(1+y)^3} , \quad \int^x \mathrm{d}y\, \frac{1-2y-y^2}{1+y+y^2+y^3} .$$

(b) Drücken Sie das Integral $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^2-1} e^{b(1-y)}$, $a > 1$, $b > 0$, mit Hilfe der speziellen Funktion $E_1(x) := \int_x^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y} e^{-y}$ aus (2 Punkte).

Aufgabe 4: Andere Integrationsmethoden.

(a) **Ableitung nach Parameter.** Berechnen Sie das Integral $I(r) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\pi} \frac{1-\cos(zr)}{z^2}$, indem Sie $I'(r)$ mit Hilfe des Integrals $\int_0^\infty \mathrm{d}z\, \frac{\sin z}{z} = \frac{\pi}{2}$ bestimmen (2 Punkte).

(b) **Reihenentwicklung.** Die spezielle Funktion $\mathrm{Li}_2(x) := -\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{y} \ln(1-y)$, $x < 1$, kann nicht explizit integriert werden. Bestimmen Sie ihre MacLaurin-Reihe (2 Punkte).

(c) **Alternative zur Partialbruchzerlegung.** In der Partialbruchzerlegung wird ein Integrand als $\frac{1}{uv} = \frac{1}{u+v}(\frac{1}{u} + \frac{1}{v})$ oder $\frac{1}{uv} = \frac{1}{v-u}(\frac{1}{u} - \frac{1}{v})$ dargestellt. Manchmal ist es aber günstiger, eine neue Integrationsvariable einzuführen und den Integrand als

$$\frac{1}{uv} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{[tu + (1-t)v]^2}$$

auszudrücken. Verifizieren Sie die Richtigkeit dieser Formel (2 Punkte).