

**Aufgabe 1: Unbestimmte Integrale.** Verifizieren Sie Folgendes (jeweils 1 Punkt):

- (a)  $\int^x \frac{dy}{\sqrt{y^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}|$  ;      (b)  $\int^x \frac{dy}{\sqrt{y^2 \pm 1}} = -\ln |x - \sqrt{x^2 \pm 1}|$  ;
- (c)  $\int^x \frac{dy}{\sin^2 y} = -\frac{1}{\tan x}$  ;      (d)  $\int^x \frac{dy}{\tan y} = \ln |\sin x|$  ;
- (e)  $\int^x \frac{2dy}{1-y^4} = \arctan x + \operatorname{artanh} x$  ;      (f)  $\int^x \frac{2y dy}{1-y^4} = \operatorname{artanh}(x^2)$  .

**Aufgabe 2: Geometrische Anwendungen bestimmter Integrale.** Sei  $f(x)$ ,  $x \in ]a, b[$ , eine positive differenzierbare Funktion. Wir betrachten die Raumkurve  $y = f(x)$  in der  $(x, y)$ -Ebene.

- (a) Zeigen Sie, ausgehend vom Satz von Pythagoras, dass die Länge der Raumkurve durch  $L = \int_a^b dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  gegeben wird (2 Punkte).
- (b) Die Raumkurve drehe einen vollen Winkel um die  $x$ -Achse. Zeigen Sie, dass die damit erzeugte Oberfläche die Fläche  $A = 2\pi \int_a^b dx f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  hat (2 Punkte).
- (c) Zeigen Sie, dass das eingeschlossene Volumen  $V = \pi \int_a^b dx [f(x)]^2$  beträgt (2 Punkte).

[Hinweis:  $L, A$  und  $V$  sind Funktionen von  $b$ ; betrachten Sie eine kleine Änderung  $b \rightarrow b + \Delta b$ .]

**Aufgabe 3: Bestimmte Integrale.**

- (a) Berechnen Sie  $L, A$  sowie  $V$  aus Aufgabe 2 für den Fall  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $a = 0$ ,  $b = r$ , wobei  $r > 0$  angenommen wird (4 Punkte).
- (b) Berechnen Sie das Integral  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta \sin \theta}{p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta}$  .  
Für welche  $p, q$  ist das Integral wohldefiniert (2 Punkte)?

**Aufgabe 4: Uneigentliche Integrale.** Die Schwerkraft hat die Form  $F(r) = mg(R/r)^2$ ,  $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $R \approx 6400 \text{ km}$ , wobei  $m$  die Masse eines Körpers und  $r$  den Abstand vom Erdmittelpunkt bezeichnen.

- (a) Bestimmen Sie die potentielle Energie  $V(r) := -\int_r^\infty d\rho F(\rho)$  (3 Punkte).
- (b) Welche Geschwindigkeit braucht der Körper, um aus dem Schwerkraftfeld der Erde entkommen zu können (3 Punkte)? [Hinweis: die Bedingung ist  $\frac{1}{2}mv^2 + V(R) > 0$ .]
- (c) Wenn es nur zwei Raumdimensionen gäbe, wäre die Schwerkraft von der Form  $F(r) = mgR/r$ . Was wäre die Antwort auf Aufgabe (b) in diesem Fall (2 Extrapunkte)?