

Aufgabe 1: Unbestimmte Integrale. Verifizieren Sie Folgendes (jeweils 1 Punkt):

- (a) $\int^x \frac{dy}{\sqrt{y^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}|$; (b) $\int^x \frac{dy}{\sqrt{y^2 \pm 1}} = -\ln |x - \sqrt{x^2 \pm 1}|$;
- (c) $\int^x \frac{dy}{\sin^2 y} = -\frac{1}{\tan x}$; (d) $\int^x \frac{dy}{\tan y} = \ln |\sin x|$;
- (e) $\int^x \frac{2dy}{1-y^4} = \arctan x + \operatorname{artanh} x$; (f) $\int^x \frac{2y dy}{1-y^4} = \operatorname{artanh}(x^2)$.

Aufgabe 2: Geometrische Anwendungen bestimmter Integrale. Sei $f(x)$, $x \in]a, b[$, eine positive differenzierbare Funktion. Wir betrachten die Raumkurve $y = f(x)$ in der (x, y) -Ebene.

- (a) Zeigen Sie, ausgehend vom Satz von Pythagoras, dass die Länge der Raumkurve durch $L = \int_a^b dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ gegeben wird (2 Punkte).
- (b) Die Raumkurve drehe einen vollen Winkel um die x -Achse. Zeigen Sie, dass die damit erzeugte Oberfläche die Fläche $A = 2\pi \int_a^b dx f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ hat (2 Punkte).
- (c) Zeigen Sie, dass das eingeschlossene Volumen $V = \pi \int_a^b dx [f(x)]^2$ beträgt (2 Punkte).

[Hinweis: L, A und V sind Funktionen von b ; betrachten Sie eine kleine Änderung $b \rightarrow b + \Delta b$.]

Aufgabe 3: Bestimmte Integrale.

- (a) Berechnen Sie L, A sowie V aus Aufgabe 2 für den Fall $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $a = 0$, $b = r$, wobei $r > 0$ angenommen wird (4 Punkte).
- (b) Berechnen Sie das Integral $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta \sin \theta}{p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta}$.
Für welche p, q ist das Integral wohldefiniert (2 Punkte)?

Aufgabe 4: Uneigentliche Integrale. Die Schwerkraft hat die Form $F(r) = mg(R/r)^2$, $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$, $R \approx 6400 \text{ km}$, wobei m die Masse eines Körpers und r den Abstand vom Erdmittelpunkt bezeichnen.

- (a) Bestimmen Sie die potentielle Energie $V(r) := -\int_r^\infty d\rho F(\rho)$ (3 Punkte).
- (b) Welche Geschwindigkeit braucht der Körper, um aus dem Schwerkraftfeld der Erde entkommen zu können (3 Punkte)? [Hinweis: die Bedingung ist $\frac{1}{2}mv^2 + V(R) > 0$.]
- (c) Wenn es nur zwei Raumdimensionen gäbe, wäre die Schwerkraft von der Form $F(r) = mgR/r$. Was wäre die Antwort auf Aufgabe (b) in diesem Fall (2 Extrapunkte)?