

Aufgabe 1: Taylor-Formel. In der Vorlesung wurde die Taylor-Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

hergeleitet, wobei $x_0 \in]a, x[$ gilt. Zeigen Sie, dass die Taylor-Formel sich nach n -facher Ableitung zum normalen Mittelwertsatz reduziert (3 Punkte).

Aufgabe 2: Näherung durch ein Polynom. Nähern Sie die Funktion $\cos(x)$ durch ein Polynom des zweiten Grads, $P_2(x)$, indem Sie (bitte skizzieren!)

- (a) bei $x = 0$ die Ableitungen $P_2^{(n)}$, $n = 0-2$, denjenigen von $\cos(x)$ gleichsetzen (3 Punkte);
- (b) die Werte der Funktionen $P_2(x)$ und $\cos(x)$ bei $x = 0, \pm\pi/2$ gleichsetzen (3 Punkte).

Aufgabe 3: Taylor-Entwicklung. In der relativistischen Mechanik kann die Energie eines Massenpunktes als

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2},$$

ausgedrückt werden, wobei m, c und p die Masse, die Lichtgeschwindigkeit, und den Impuls bezeichnen. Die Geschwindigkeit kann durch $v = dE/dp$ bestimmt werden.

- (a) Drücken Sie E als Funktion der Geschwindigkeit aus, d.h. als $E(v)$ (3 Punkte).
- (b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von $E(v)$ um den Punkt $v = 0$ (3 Punkte).
- (c) Für ultrarelativistische Teilchen ($v \approx c$) ist es günstig, eine Reihenentwicklung in der Variable mc/p statt v/c zu benutzen. Bestimmen Sie diese Entwicklung (3 Punkte).

Aufgabe 4: MacLaurin-Reihe der Umkehrfunktion. In der Vorlesung wurde die MacLaurin-Reihe der Funktion $\arctan(x)$ hergeleitet:

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Bestimmen Sie die sechs ersten Terme der MacLaurin-Reihe der Funktion $\tan(x)$, d.h. $c_0 - c_5$ in der Darstellung

$$\tan(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \dots, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

durch Betrachtung der definierenden Beziehung $\arctan(\tan(x)) = x$ (6 Punkte).