Übungen zu MMP I	**Blatt Nr. 03**

[Tutorium 03.10., Abgabe 10.10.]

Aufgabe 1: Mittelwertsatz. Der Wert der Funktion $f(x)$ sei an drei Orten, $x_0 - \epsilon$, x_0, sowie $x_0 + \epsilon$, bekannt, wobei ϵ eine kleine positive Zahl ist. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes können $f'(x_1)$ oder $f'(x_2)$ bestimmt werden, mit jeweils $x_0 - \epsilon < x_1 < x_0$ und $x_0 < x_2 < x_0 + \epsilon$.

(a) Uns interessiert aber die Ableitung bei x_0, d.h. $f'(x_0)$. Möglicherweise können wir diese durch eine Mittelung von $f'(x_1)$ und $f'(x_2)$ nähern. Bestimmen Sie den entsprechenden Ausdruck (2 Punkte).

(b) Der Ausdruck aus Aufgabe (a) ist nicht exakt, sondern enthält einen „Fehler", bezeichnet durch die Funktion $O(\epsilon)$. Wir nehmen an, dass $O(\epsilon)$ als Potenzreihe in ϵ dargestellt werden kann. Wie benimmt sich $O(\epsilon)$ für $\epsilon \to 0$? [Hinweis: Betrachten Sie die Transformation $\epsilon \to -\epsilon$.] (2 Punkte)

(c) Können Sie mittels der gegebenen Daten $f(x_0 - \epsilon), f(x_0), f(x_0 + \epsilon)$ auch eine Näherung für $f''(x_0)$ präsentieren (2 Punkte)?

Aufgabe 2: Minimierung durch Differenziation. Seien P_1 und P_2 zwei Punkte auf der x-Achse, im Abstand l voneinander. Welche ist die kürzeste stetige Kurve in der (x, y)-Ebene, die von P_1 nach P_2 läuft, und mindestens einmal die Gerade $y = a$ berührt (6 Punkte)?

Aufgabe 3: Kurvendiskussion. Wir betrachten die Funktion

$$f(q) \quad := \quad \sqrt{p^2 + 2pqz + q^2 + M^2} - \sqrt{p^2 + M^2} - q \; ,$$

mit $p, q, M \in \mathbb{R}_+$ und $z \in [-1, 1]$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(q)$ monoton fallend ist (2 Punkte).

(b) Bestimmen Sie $\lim_{q \to 0^+} f(q)$, und skizzieren Sie $f(q)$. Gibt es Nullstellen (2 Punkte)?

(c) Bestimmen Sie $\lim_{q \to \infty} f(q)$ (2 Punkte).

[Die Antwort vom Punkt (b) kann physikalisch so interpretiert werden, dass ein massives Teilchen wegen Energie-Erhaltung kein Photon abstrahlen kann.]

Aufgabe 4: Implizite Differenziation. Wenn ein thermodynamisches System bei konstanter Temperatur betrachtet wird, kann die Zustandsgleichung (d.h. die Abhängigkeit des Druckes, p, vom Volumen, V) in guter Näherung als

$$\Big(p + \frac{a}{V^2}\Big)\Big(V - b\Big) = \text{const} \; ,$$

ausgedrückt werden, wobei a und b Konstanten sind. Berechnen Sie $\mathrm{d}V/\mathrm{d}p$ (6 Punkte).