Übungen zu MMP I	**Blatt Nr. 02**

[Tutorium 26.09., Abgabe 03.10.]

Aufgabe 1: Umgang mit komplexen Zahlen. Bestimmen Sie (jeweils 2 Punkte):

(a) $|z|$, $\arg z$, z^*, z^{-1} für $z = 1 + i$.

(b) z^2, $(z^*)^2$, zz^*, z/z^* für $z = 2 + 3i$.

(c) z^{-3}, z^{-2}, z^{-1}, z^4 für $z = -i$.

Aufgabe 2: Komplexe Funktionen.

(a) Ausgehend von der Euler-Formel, drücken Sie $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ mittels der Exponentialfunktion aus (2 Punkte).

(b) Zeigen Sie, dass $\exp(z + 2n\pi i) = \exp(z)$ gilt, wobei $n \in \mathbb{Z}$ (2 Punkte). [Folglich kann die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion (Logarithmus) nur in einem Teilbereich der komplexen Ebene definiert werden.]

(c) Ermitteln Sie $\arctan z$ mittels des komplexen Logarithmus (2 Punkte).

Aufgabe 3: Ableitungen. Ausgehend von den bekannten Ableitungen von x^m ($m \in \mathbb{N}$), $\sin x$, $\tanh x$, und $\exp(x)$, von den Definitionen deren Umkehrfunktionen, sowie von der Formel $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)|_{x=f^{-1}(y)}$, bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}\sqrt[m]{x}}{\mathrm{d}x}$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(b) $\dfrac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}x}$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(c) $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{artanh}\, x}{\mathrm{d}x}$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(d) $\dfrac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x}$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte).

Aufgabe 4: Stetigkeit und Differenzierbarkeit. In der relativistischen Thermodynamik spielt die folgende Funktion eine wichtige Rolle:

$$g(\tau) := \frac{\cosh[\beta/2 - (\tau \bmod \beta)]}{2\sinh(\beta/2)}\,, \quad \beta = \mathrm{const}\,,$$

wobei $\tau \bmod \beta := \tau + n\beta$, mit $n \in \mathbb{Z}$ so gewählt dass $0 \le \tau + n\beta < \beta$ gilt.

(a) Skizzieren Sie $g(\tau)$ für $-2\beta \le \tau \le 2\beta$. Ist $g(\tau)$ stetig? Differenzierbar? (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie $\lim_{\tau\to 0^+} g'(\tau) - \lim_{\tau\to 0^-} g'(\tau)$ (2 Punkte).

(c) Die zweite Ableitung von $g(\tau)$ wird als $g''(\tau) := \mathrm{d}g'(\tau)/\mathrm{d}\tau$ definiert. Zeigen Sie, dass für $0 < \tau < \beta$ die folgende Gleichung gilt: $g''(\tau) = g(\tau)$ (2 Punkte).