Übungen zu MMP I	**Blatt Nr. 01**

[Tutorium 19.09., Abgabe 26.09.]

Aufgabe 1: Koordinaten. Ein eindimensionaler Raum wird durch eine Koordinate $y \in]0, \infty[$ parametrisiert. Messgeräte liegen an Abständen $\Delta y = 10$ voneinander, das erste bei $y = 1$, wobei angemessene dimensionslose Einheiten benutzt werden.

(a) Eine neue Koordinate wird eingeführt, und zwar als $x = 1/(1 + y)$. In welchem Intervall soll sie definiert werden, um den ganzen Raum zu beschreiben (1 Punkt)?

(b) Messungen bezüglich y hatten einen "Kometen" entdeckt, der den Messgeräten bei konstanten Zeitintervallen, Δt, in positive y-Richtung vorbeigeflogen war: $v = \Delta y/\Delta t =$ const. Wie benimmt sich die Geschwindigkeit bzgl. der neuen x-Koordinate, $\Delta x/\Delta t$, als Funktion der Zeit (2 Punkte)? Skizzieren Sie $\Delta x/\Delta t$ auch als Funktion von x (2 Punkte).

(c) Eine andere mögliche Koordinatentransformation lautet $z = y^\alpha$, mit $\alpha > 0$. Für welche α ist $\Delta z/\Delta t$ eine wachsende Funktion von t (anscheinende Beschleunigung) (1 Punkt)?

Aufgabe 2: Polynome. Betrachtet wird ein Polynom des dritten Grades, $f(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n x^n$, mit gegebenen a_n. Eine andere mögliche Darstellung wäre $f(x) = \sum_{n=0}^{3} b_n (x - x_0)^n$.

(a) Wie soll b_3 gewählt werden, so dass die zwei Darstellungen äquivalent sind (1 Punkt)?

(b) Wie soll x_0 gewählt werden, so dass $b_2 = 0$ gilt (1 Punkt)? Oder $b_1 = 0$ (2 Punkte)?

(c) Unter welchen Umständen wäre die Produktdarstellung $f(x) = c_0(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$, mit $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, auch möglich (2 Punkte)? [Begründung durch eine Skizze reicht.]

Aufgabe 3: Potenzen. Verifizieren Sie, ausgehend von der Definition $a^x := \exp(x \ln a)$, $a > 0$, und der bekannten Formel $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y)$, die folgenden Identitäten:

(a) $a^x a^y = a^{x+y}$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(b) $(a^x)^y = a^{xy}$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(c) $a^x b^x = (ab)^x$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(d) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte).

Aufgabe 4: Komposition und Umkehrfunktion. Eine Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ wird als

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}\,, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases} \qquad \text{definiert .}$$

(a) Skizzieren Sie $f(x)$ und $f'(x) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Für welche x ist $f'(x)$ wohldefiniert? (2 Punkte)

(b) Skizzieren Sie die Kompositionen $(f \circ f)(x)$ und $(f \circ f \circ f)(x)$ (2 Punkte).

(c) Konstruieren Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, 1] \to [\frac{1}{2}\,, 1]$ (2 Punkte).