4. Tensoren

[Lang & Pucker 10.1-3]

Orthogonale Basistransformationen (Seite 51) :

$$v' = O^T v \quad \Leftrightarrow \quad v'_i = \sum_{j=1}^{n} O^T_{ij} v_j$$

$$M' = O^T M O \quad \Leftrightarrow \quad M'_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n} O^T_{ik} M_{k\ell} O_{\ell j} = \sum_{k,\ell=1}^{n} O^T_{ik} O^T_{j\ell} M_{k\ell} \,.$$

Das Ziel ist jetzt, diese Notation zu „verbessern" und den Begriff der Basistransformationen zu verallgemeinern.

Bezeichnungen:

* Setze bei v_j den Index oben : $v^j|_{neu} := v_j|_{alt}$, $j = 1, \dots, n$.
  Es geht dann um einen „kontravarianten" Vektor bzw. um einen kontravarianten Tensor 1. Stufe.

* Notation für die Transformation : $\Lambda^i{}_j := O^T_{ij}$.

* Führe die Einsteinsche (1879–1955) Summenkonvention ein: wenn ein Index zweimal vorkommt, einmal unten und einmal oben, wird darüber summiert :
  $$\Lambda^i{}_j v^j := \sum_{j=1}^{n} \Lambda^i{}_j v^j \,.$$

* Die Matrix wird zum kontravarianten Tensor 2. Stufe :
  $$M^{ij}|_{neu} := M_{ij}|_{alt} \,.$$

Anhand dieser Bezeichnungen können die Transformationen also als

$$v'^i = \Lambda^i{}_j v^j \quad , \quad M'^{ij} = \Lambda^i{}_k \Lambda^j{}_\ell M^{k\ell}$$

geschrieben werden.

Definition : „Kovariante" Vektoren bzw. Tensoren, mit Indizes unten, werden mit Hilfe des Kronecker- Symbols definiert :

$$v_i := \delta_{ij} v^j \left(= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v^j = v^i \right)$$

$$M_{ij} := \delta_{ik} \delta_{j\ell} M^{k\ell}$$

$$T_{ijk}{}^{mn} := \delta_{it} \delta_{js} \delta_{ku} T^{tsumn}$$

kontravarianter Tensor 5. Stufe

Tensor 5. Stufe mit 3 kovarianten und 2 kontravarianten Indizes.
(Zum Beispiel : $v_i M_{jk} v^m v^n$).

Die inverse Transformation:

$$\delta^{ij} := (\delta^{-1})_{ij} \;,\; \text{d.h.} \;\; \delta^i{}_j := \delta^{ik} \delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\delta^{-1})_{ik} \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Wegen $\mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1}$ gilt $\delta^{ij} = \delta_{ij}$.

Die inverse Transformation : $v^i = \delta^{ij} v_j$,

d.h. Indizes können sowohl herauf- als auch heruntergezogen werden.

Transformationsgesetz für kovariante Indizes

$$T'^{\cdots}{}_{i}{}^{\cdots} = \delta_{ij}\, T'^{\cdots j \cdots} = \delta_{ij}\, \Lambda^{j}{}_{k}\, T^{\cdots k \cdots} = \delta_{ij}\, \Lambda^{j}{}_{k}\, \delta^{kl}\, T^{\cdots}{}_{l}{}^{\cdots} ,$$

d.h. $T'^{\cdots}{}_{i}{}^{\cdots} = \Lambda_{i}{}^{l}\, T^{\cdots}{}_{l}{}^{\cdots}$, mit $\Lambda_{i}{}^{l} = \delta_{ij}\, \Lambda^{j}{}_{k}\, \delta^{kl}$.

Invarianz: Ein Hauptgrund für die Einführung dieser Notation besteht darin, dass es leicht zu sehen ist, welche Größen invariant („skalar") sind.

Es gilt: $T'^{\cdots}{}_{i}{}^{\cdots i \cdots} = \delta_{ij}\, T'^{\cdots j \cdots i}{}_{\cdots} = \delta_{ij}\, \Lambda^{j}{}_{k}\, \Lambda^{i}{}_{m}\, T^{\cdots k \cdots m}{}_{\cdots}$

Hier ist: $\delta_{ij}\, \Lambda^{j}{}_{k} \Lambda^{i}{}_{m} = \sum_{i,j} \delta_{ij}\, O^{T}_{jk}\, O^{T}_{im} = \sum_{i,j} O_{kj}\, \delta_{ij}\, O^{T}_{im}$

$$= \sum_{i} O_{ki} O^{T}_{im} \underset{OO^T = \mathbb{1}}{=} \delta_{km} .$$

Insgesamt also $T'^{\cdots}{}_{i}{}^{\cdots i \cdots} = T^{\cdots}{}_{k}{}^{\cdots k}$; wenn Indizes „kontrahiert" werden, bekommt man eine skalare Größe!

D.h., $\boxed{\text{nur „frei" Indizes werden transformiert.}}$

Beispiele:

* Ein Vektor (als Ganzes) wird als $\vec{v} = v^{i}\vec{e}_{i}$ geschrieben, und ist invariant.
* Ein Skalarprodukt zweier Vektoren ist auch invariant:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = v^{i}\vec{e}_{i} \cdot w^{j}\vec{e}_{j} = v^{i}w^{j}\; \vec{e}_{i}\cdot\vec{e}_{j} = v^{i}w^{j}\,\delta_{ij} = v^{i}w_{i} .$$

* Ebenso eine quadratische Form:

$$\vec{\vec{M}} = M^{ij}\, \underbrace{\vec{e}_{i} \otimes \vec{e}_{j}}_{\text{„Tensorprodukt"}} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{\vec{M}}\cdot\vec{w} = v^{k} M^{ij} w^{l}\; \overbrace{\vec{e}_{k}\cdot\vec{e}_{i}}^{\delta_{ki}}\; \overbrace{\vec{e}_{j}\cdot\vec{e}_{l}}^{\delta_{jl}} = v_{i} M^{ij} w_{j}$$

* Die Komponenten v^{i}, M^{ij} usw sind nicht invariant.
* Eine Ausnahme: der Levi-Civita-Tensor ist ein „invarianter Tensor":

$$\varepsilon'_{ijk\ldots} = \Lambda_{i}{}^{m}\, \Lambda_{j}{}^{n}\, \Lambda_{k}{}^{o} \cdots \varepsilon_{mno\ldots}$$

$$\underset{\text{(Seite 41)}}{\overset{!}{=}} \det(\Lambda)\; \varepsilon_{ijk\ldots} \qquad ; \quad \text{Aufgabe } 10.3(c) \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 .$$

Verallgemeinerungen: Falls δ_{ij} durch den „metrischen Tensor", g_{ij}, ersetzt wird, bekommen wir den Formalismus der Differentialgeometrie, welcher z.B. in der allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielt. Der Spezialfall von „Minkowski-Metrik" (1864 – 1909) entspricht der speziellen Relativitätstheorie.