Verallgemeinerungen (z.B. M nicht symmetrisch)

Eine „Ähnlichkeitstransformation" wird als $M \to M' = P^{-1} M P$ definiert.

Klassische Fragen der linearen Algebra sind, unter welchen Bedingungen eine solche P existiert dass M' diagonal wird, und wie diese P konstruiert werden kann?

Falls P existiert, können viele Aussagen gemacht werden:

* die diagonalen Elemente von M' sind genau die Eigenwerte von M.

  $$\left[M' e_i' = \lambda_i e_i' \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1} M P e_i' = \lambda_i e_i' \quad \Rightarrow \quad M(P e_i') = \lambda_i (P e_i'). \ \square \right]$$

(Um genau zu sein sind diese Eigenschaften unabhängig davon ob M' diagonalisiert wird.)

* Spur und Determinante bleiben in der Transformation invariant.

  $$\left[\begin{array}{l} \mathrm{Sp}(P^{-1} M P) = \mathrm{Sp}(P P^{-1} M) = \mathrm{Sp}(M) \\ \det(P^{-1} M P) = \det(P^{-1}) \det(M) \det(P) = \underbrace{\det(P^{-1} P)}_{1} \det(M) \end{array} \right]$$

* Summe und „Produkt" von Matrizen transformieren sich wie die Matrizen selbst.

  $$\left[\begin{array}{l} M' + N' = P^{-1} M P + P^{-1} N P = P^{-1}(M+N) P \\ M' N' = P^{-1} M \underbrace{P P^{-1}}_{\mathbb{1}} N P = P^{-1}(MN) P \end{array} \right]$$

* die ursprüngliche Matrix M kann durch die Spektraldarstellung ausgedrückt werden:

  $$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{M'} = P^{-1} M P \quad \Rightarrow \quad M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} .$$

Um P zu konstruieren, könnten wir wieder die Eigenvektoren von M als Spalten setzen (vgl. Seite 51). Die Frage ist dann, ob P^{-1} existiert; dies ist der Fall nur falls es n Eigenvektoren gibt, und diese linear unabhängig sind. Nicht immer der Fall! (vgl. B in Aufgabe 12.1)

Es gibt aber einige einfache hinreichende Bedingungen, z.B. dass alle n Eigenwerte unterschiedlich sind.

[Ohne Beweis; eine Ähnlichkeit mit Punkt (ii) auf Seite 50 kann aber bemerkt werden.]

Die in der Physik auftauchenden Matrizen können in der Regel diagonalisiert werden, und zwar mit einer orthogonalen ($P^{-1} = P^T$) bzw. unitären ($P^{-1} = P^\dagger$) Matrix.

[M^{-1} braucht nicht zu existieren; nur P^{-1}!]

— o —

Matrixfunktionen

Wenn wir „Produkte" (d.h. Kompositionen) von Matrizen miteinander linear kombinieren, bekommen wir Matrixfunktionen, z.B. ein Polynom

$$P_m(M) = \sum_{k=0}^{m} a_k M^k \quad , \quad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad M^0 := \mathbb{1} .$$

Die höchste Potenz könnte im Prinzip beliebig groß sein; der Satz von Cayley und Hamilton (Seite 49) besagt aber, dass bei $n \times n$-Matrizen nur Potenzen bis M^{n-1} unabhängig voneinander sind.

Falls M auch noch diagonalisierbar ist, gilt (vgl. Seite 53)

$$\sum_{k=0}^{m} a_k M^k = P \sum_{k=0}^{m} a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} .$$

Falls diese Summen für alle Eigenwerte, also insbesondere für $\max(\{|\lambda_i|\})$, konvergent sind, können wir hier sogar $m \to \infty$ schicken.

Besonders wichtig ist die matrixwertige Exponentialfunktion:

$$\exp(M) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k = \mathbb{1} + M + \frac{1}{2} M^2 + \dots$$

Diese Reihe ist konvergent, weil $\exp(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ konvergent ist.

Einige wichtige Eigenschaften:

* $\det(\exp(M)) = \exp(Sp(M))$

  $$\left[\det(\exp(M)) = \det\left(P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \right) = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} = e^{Sp(M)} \right]$$

* $\ln(\det(Q)) = Sp(\ln(Q))$

  [$Q := \exp(M)$; definiere matrixwertige ln als Umkehrfunktion von exp, d.h. $M =: \ln(Q)$.]

* $\exp(tM)\exp(tN) = \exp\left\{ t(M+N) + \frac{t^2}{2}[M,N] + \mathcal{O}(t^3) \right\}$,

  wobei $[M,N] := MN - NM$ (vgl. Aufgabe 9.4)

  „Campbell - Baker - Hausdorff - Formel"
  (Campbell 1862–1924, Baker 1866–1956, Hausdorff 1868–1942)

  [Ohne Beweis]