3.6 Diagonalisierung

[Lang & Pucker 5.3.4, 14.2 (3.4, 16.2)]

Orthogonale Basistransformation (Seite 40):

$$\vec{e}_i' := O\vec{e}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_i'\cdot\vec{e}_j' = [e_i']^T[e_j'] = e_i^T O^T O e_j = \delta_{ij},$$

d.h. die neue Basis ist auch orthonormiert, falls $O^T O = \mathbb{1}$ gilt.

Matrixelemente in der neuen Basis:

$$M_{ij}' := \vec{e}_i'\cdot M\vec{e}_j' = [e_i']^T M e_j' = e_i^T O^T M O e_j = (O^T M O)_{ij}.$$

Vektorkomponente in der neuen Basis:

$$v_i' := \vec{e}_i'\cdot\vec{v} = [e_i']^T v = e_i^T O^T v = (O^T v)_i .$$

Kurz zusammengefasst: Spaltenvektoren (v), Zeilenvektoren (v^T) und Matrizen (M) werden als

$$v \to v' = O^T v$$
$$v^T \to v'^T = v^T O$$
$$M \to M' = O^T M O$$

transformiert. „Skalare" Größen wie $v^T v$ oder $v^T M v$ sind invariant.

— o —

Sei jetzt M eine symmetrische $n\times n$-Matrix. Wir nehmen an, dass alle n Eigenwerte ungleich sind oder, falls es Entartung gibt, dass die Eigenvektoren trotzdem als orthogonal (und normiert) gewählt werden können (vgl. Seite 50).

Wir setzen die Eigenvektoren als Spalten in O: $\quad O := (v^{(1)}\, v^{(2)} \ldots v^{(n)})$

Es gilt: $\quad MO = (Mv^{(1)}\, Mv^{(2)} \ldots Mv^{(n)}) = (\lambda_1 v^{(1)}\, \lambda_2 v^{(2)} \ldots \lambda_n v^{(n)})$,

$$O^T M O = \begin{pmatrix} v^{(1)T} \\ v^{(2)T} \\ v^{(n)T} \end{pmatrix} (\lambda_1 v^{(1)}\ \lambda_2 v^{(2)} \ldots \lambda_n v^{(n)})$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \overbrace{v^{(1)T}v^{(1)}}^{1} & \lambda_2 \overbrace{v^{(1)T}v^{(2)}}^{0} & \cdots & \lambda_n \overbrace{v^{(1)T}v^{(n)}}^{0} \\ \lambda_1 \underbrace{v^{(2)T}v^{(1)}}_{0} & \lambda_2 \underbrace{v^{(2)T}v^{(2)}}_{1} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ & & & \lambda_n v^{(n)T}v^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

D.h., die so gewählte orthogonale Basistransformation diagonalisiert die Matrix M: M' hat nur diagonale Komponente, die genau die Eigenwerte von M (und M') sind.

Eine klassische Anwendung der Diagonalisierung beschäftigt sich mit quadratischen Formen und wird auch <u>Hauptachsentransformation</u> genannt.

Sei $f(x_1, \dots, x_n) := x^T M x$.

[Bemerkung: M kann immer als symmetrisch gewählt werden.

Beweis: $$f = \sum_{i,j=1}^{n} x_i M_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\tfrac12 x_i M_{ij} x_j + \tfrac12 x_j M_{ji} x_i \right)$$ umnenne Indizes!

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \frac{M_{ij} + M_{ji}}{2} x_j$$

$$= x^T \underbrace{\left(\frac{M+M^T}{2} \right)}_{\text{symmetrisch!}} x$$]

Die komplizierte Gleichung $f(x_1, \dots, x_n) = C$ kann in neuen Koordinaten viel einfacher als

$$x^T \underset{\mathbb{1}=OO^T}{\cdot} M \underset{\mathbb{1}=OO^T}{\cdot} x = \underbrace{(O^T x)}_{x'}{}^T \underbrace{O^T M O}_{M'} \underbrace{(O^T x)}_{x'} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i')^2 = C$$

ausgedrückt werden.

[„Rang" der quadratischen Form := Zahl von $\lambda_i \neq 0$.
Falls $\forall \lambda_i > 0$ geht es um die Gleichung eines „Ellipsoids" in Hauptachsenlage.]

<u>Beispiel</u>: Skizziere Lösung von $2x^2 + 4xy - y^2 = 6$.

$\Rightarrow$ Schreibe Gl. als $(x\ y) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6$.

Eigenwerte und Eigenvektoren von $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$: $\lambda_1 = -2,\ v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\lambda_2 = 3,\ v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Eigenvektoren sind orthogonal: $[v^{(1)}]^T v^{(2)} = \frac15 (2-2) = 0$.

$O = (v^{(1)}\ v^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $O^T = \frac{1}{\sqrt5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = O^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5} \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

$$M' = O^T M O = \frac{1}{\sqrt5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

In neuen Koordinaten gilt also $-2(x')^2 + 3(y')^2 = 6$

$\Leftrightarrow\ y' = \pm \sqrt{2 + \frac23 (x')^2}$