Allgemeine Eigenschaften der Eigenwerte

* $\det M = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, d.h. Determinante ist Produkt von Eigenwerten.

[Beweis: $P_n(\lambda) = \Delta(m_1 - \lambda e_1, \ldots, m_n - \lambda e_n) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.

Nehme auf beiden Seiten Term der Ordnung λ^0

$$\Rightarrow \quad \Delta(m_1, \ldots, m_n) = \underbrace{(-1)^{2n}}_{1} \lambda_1 \cdots \lambda_n \qquad \square$$]

* $\mathrm{Sp}\, M = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, d.h. Spur ist Summe von Eigenwerten.

[Beweis: $P_n(\lambda) = \Delta(m_1 - \lambda e_1, \ldots, m_n - \lambda e_n) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.

Nehme auf beiden Seiten Terme der Ordnung λ^{n-1} ($\mathrm{Sp}\, M$!)

$$\Rightarrow \quad (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \left[\Delta(m_1, e_2, \ldots, e_n) + \Delta(e_1, m_2, \ldots, e_n) + \Delta(e_1, e_2, \ldots, m_n) \right]$$

$$= (-1)^{n+1} \lambda^{n-1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$$

$\Rightarrow \quad \square$]

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \det(M - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$

$$= \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc = \lambda^2 - \lambda\, \mathrm{Sp}(M) + \det(M).$$

Auf der anderen Seite: $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2$.

* Alle Eigenwerte sind invariant in einer orthogonalen Basistransformation.

[Beweis: Seite 40: $M' = O^T M O$.

Sei $Mv = \lambda v$. Dann gibt es einen Vektor v',

nämlich $v' = O^T v$, so dass $M' v' = \lambda v'$:

$$M' v' = O^T M \underbrace{O O^T}_{\mathbb{1}} v = O^T M v = O^T \lambda v = \lambda O^T v = \lambda v'. \quad \square$$]

* Satz von Cayley (1821-1895) und Hamilton (1805-1865): jede $n \times n$ - Matrix M erfüllt ihre Säkulargleichung, d.h. $P_n(M) = O_{n \times n}$

Nullabbildung

[Ansatz zum Beweis: Sei v ein allgemeiner Vektor. Wir nehmen an, dass v als Linearkombination von Eigenvektoren, $v^{(i)}$, ausgedrückt werden kann (?). Für jeden $v^{(i)}$ gilt:

$$P_n(M)\, v^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_j M^j v^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda_i^j v^{(i)} = \underbrace{P_n(\lambda_i)}_{0} v^{(i)} = 0.$$]

Weitere Sätze

* Sei M symmetrisch, $M^T = M$. Dann sind
(i) die Eigenwerte reell, und
(ii) die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten „orthogonal" zueinander, d.h. $[v^{(i)}]^+[v^{(j)}] = 0$ für $i \neq j$.

Beweis: (i) Sei v ein Eigenvektor und λ der entsprechende Eigenwert. Betrachte eine „quadratische Form" (vgl. Aufgabe 11.4):

$$v^+ M v = \lambda v^+ v .$$

Es gilt:

$$(v^+ M v)^+ \underset{\boxed{(AB)^+ = B^+A^+}}{=} v^+ M^+ v \underset{\boxed{M \text{ reell und } M^T = M}}{=} v^+ M v$$

$$\Rightarrow (\lambda v^+ v)^+ = \lambda v^+ v$$

$$\Leftrightarrow \lambda^* v^+ v = \lambda v^+ v \quad \Rightarrow \lambda^* = \lambda \quad \square.$$

(ii) $\underset{(a)}{M v^{(1)} = \lambda_1 v^{(1)}}$; $M v^{(2)} = \lambda_2 v^{(2)}$

adjungiere $\Rightarrow$ $[v^{(2)}]^+ M = \lambda_2 [v^{(2)}]^+$ (b)

Es gilt: $[v^{(2)}]^+ M v^{(1)} \underset{(a)}{=} \lambda_1 [v^{(2)}]^+[v^{(1)}] \underset{(b)}{=} \lambda_2 [v^{(2)}]^+[v^{(1)}]$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)[v^{(2)}]^+[v^{(1)}] = 0 \underset{\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2}}{\Rightarrow} [v^{(2)}]^+[v^{(1)}] = 0 \quad \square.$$

Bemerkung: dieselben Aussagen gelten auch für komplexe Matrizen, falls diese „hermitesch" sind, d.h. $M^+ = M$ erfüllen.

* Sei M orthogonal, $\underset{(c)}{M^T M = \mathbb{1}}$. Dann gilt $|\lambda| = 1$.

Beweis: $\underset{(d)}{M v = \lambda v} \underset{\boxed{\text{adjungiere und benutze } M^+ = M^T \text{ für } M \text{ reell}}}{\Rightarrow} \underset{(e)}{v^+ M^T = v^+ \lambda^*}$

$$\Rightarrow v^+ M^T M v \underset{(c)}{=} v^+ v \underset{(d)\&(e)}{=} \lambda^* \lambda \, v^+ v \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \quad \square$$

Bemerkung: dieselbe Aussage gilt auch für eine komplexe Matrix, falls diese „unitär" ist, d.h. $M^+ M = \mathbb{1}$ erfüllt.