3.5 Eigenwerte und Eigenvektoren [Lang & Pucker 5.3.4 (3.4)]

Eine lineare Abbildung verursacht in der Regel eine „Transformation" (z.B. Drehung, vgl. Aufgabe 9.3): $M\vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \nparallel \vec{w}$ (es sei denn, $M \propto \mathbb{1}$). Es gibt aber <u>besondere Vektoren</u>, die im Wesentlichen <u>nicht</u> transformiert werden.

<u>Definition:</u> Falls $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ und $v \neq 0$ mit

$$Mv = \lambda v,$$

dann hat M den <u>Eigenvektor</u> v und den entsprechenden <u>Eigenwert</u> λ.

<u>Bemerkungen:</u>

* $\exists\, v \neq 0$ mit $Mv = 0$ (d.h. $\det M = 0$)
  $\Rightarrow \lambda = 0$ ist ein Eigenwert, denn $0 = 0v$.
* v ist <u>nicht</u> eindeutig: αv, mit $\alpha \in \mathbb{R}$, ist auch ein Eigenvektor mit <u>demselben</u> Eigenwert:
  $$M\alpha v = \alpha M v = \alpha \lambda v = \lambda \alpha v .$$
* $\mathbb{1} v = v \;\; \forall v \Rightarrow \lambda = 1$ für $M = \mathbb{1}$, und das System ist „entartet", d.h. es gibt n linear unabhängige Eigenvektoren zum selben Eigenwert.
* $M_{ij} \in \mathbb{R}$, aber trotzdem $\lambda \in \mathbb{C}$ erlaubt! (Erklärung folgt.)

<u>Sätze:</u> Die folgenden Aussagen sind äquivalent (d.h. „$\Leftrightarrow$"):

Seite 46:

(i) M ist regulär, d.h. M^{-1} existiert

(ii) $\det M \neq 0$

(iii) die Spalten bzw. Zeilen von M sind linear unabhängig

(iv) $Mv = 0 \Rightarrow v = 0$

(v) $Mv_1 = Mv_2 \Rightarrow v_1 = v_2$

neu:

(vi) alle Eigenwerte sind $\neq 0$!

[Beweis: Äquivalenz (iv) $\Leftrightarrow$ (vi):

„$\Rightarrow$" $\nexists\, v \neq 0$ mit $Mv = 0$
$\Rightarrow \nexists\, v \neq 0$ mit $Mv = 0v$ $\square$.

„$\Leftarrow$" $\nexists\, v \neq 0$ mit $Mv = 0v = 0$
$\Rightarrow Mv = 0$ impliziert $v = 0$ $\square$.]

Wie können Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt werden?

$$Mv = \lambda v \,,\ v \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (M - \lambda \mathbb{1})\, v = 0 \,,\ v \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0} \ !$$

__Bemerkungen:__

* $\det(M - \lambda\mathbb{1}) = \Delta(m_1 - \lambda e_1, \dots, m_n - \lambda e_n)$ ist ein Polynom des Grades n, $P_n(\lambda)$, und wird ein „<u>charakteristisches Polynom</u>" genannt.
* die Gleichung $P_n(\lambda) = 0$ heißt „<u>Säkulargleichung</u>".
* Fundamentalsatz der Algebra $\Rightarrow$ $P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
  Derselbe λ_i kann auch mehrmals auftauchen.
  Weiterhin sind komplexe Paare möglich. Die λ_i's sind die Eigenwerte.
* Nach Bestimmung von λ_i kann der entsprechende $v^{(i)}$ aus $(M - \lambda_i \mathbb{1})\, v^{(i)} = 0$ gefunden werden.
* Die konventionelle Normierung:
  $$[v^{(i)}]^\dagger v^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} (v_k^{(i)})^* v_k^{(i)} = 1.$$

Zur Erinnerung (Seite 39):

$$\underbrace{(\dots)^\dagger}_{\text{„adjungiert"}} = \underbrace{((\dots)^T)}_{\text{„transponiert"}}{}^{\overbrace{*}^{\text{„komplex-konjugiert"}}}$$

__Beispiel:__

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \{-1, 2\}$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = -1}}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 2v_1 + v_2 &= 0 \\ v_2 &= -2v_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad v^{(1)} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Normierung: $[v^{(1)}]^\dagger [v^{(1)}] = v_1^2 (1+4) = 1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

hier wurde $v_1 \in \mathbb{R}$ angenommen

$$\Rightarrow \quad v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\lambda_2 = 2}}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} v_1 - v_2 &= 0 \\ v_2 &= v_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad v^{(2)} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierung: $[v^{(2)}]^\dagger [v^{(2)}] = v_1^2 (1+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$