(ii) In der Praxis: durch den Gauß - Jordan (1842 - 1899) - Algorithmus. (verwandt mit Gauß / Seite 42)

$$M v = \mathbb{1} w \qquad \Big| \text{ „multipliziere" vom links mit } M^{-1} \text{ (falls diese existiert)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{1} v = M^{-1} w$$

Das heisst, wenn es uns gelingt, mit Methoden wie für die Determinante auf Seite 42 (Summierung und Skalierung von Zeilen) die Matrix M in eine Einheitsmatrix umzuformen, geht die Einheitsmatrix gleichzeitig in die inverse Matrix M^{-1} über!

<u>Beispiel</u>:

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M^{-1} = ?$$

Setze M und $\mathbb{1}$ nebeneinander:

$$\begin{array}{l} \\ \times 2 + (-1) \cdot 1. \\ \times 2 + (-3) \cdot 1. \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{„benutze 1. Zeile"}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} \times 1 + (-3) \cdot 2. \\ \\ \times 1 + (7) \cdot 2. \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{„benutze 2. Zeile"}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} \times 3 + (2) \cdot 3. \\ \times 2 + (-1) \cdot 3. \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -10 & 14 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{„benutze 3. Zeile"}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} \times \frac{1}{6} \\ \times \frac{1}{2} \\ \times \frac{1}{6} \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -8 & 10 & 4 \\ 8 & -10 & -2 \\ -10 & 14 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{„skaliere"}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 12 & -15 & -3 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}}_{M^{-1}\;!}$$

<u>Check</u>:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 12 & -15 & -3 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \times 2 + 5 \times 1 + 2 \times 3 & -4 \times 3 + 5 \times 2 + 2 \times 1 & -4 \times 5 + 5 \times 4 + 2 \times 0 \\ 12 \times 2 - 15 \times 1 - 3 \times 3 & 12 \times 3 - 15 \times 2 - 3 \times 1 & 12 \times 5 - 15 \times 4 - 3 \times 0 \\ -5 \times 2 + 7 \times 1 + 1 \times 3 & -5 \times 3 + 7 \times 2 + 1 \times 1 & -5 \times 5 + 7 \times 4 + 1 \times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ok!}$$

Anwendungen

Ausgangspunkt vieler Anwendungen von Determinanten und inversen Matrizen ist ein wichtiger Satz:

M ist regulär (d.h. M^{-1} existiert, d.h. $\det M \neq 0$) $\Leftrightarrow$ die Gleichung $Mv = 0$ hat nur die „triviale" Lösung $v = 0$.

Beweis: „$\Rightarrow$" : $Mv = 0$ | „multipliziere" vom links mit M^{-1}

$\Rightarrow v = M^{-1}0 = 0$.

„$\Leftarrow$" (teilweise) : Sei $w = Mv$. Dann ist v eindeutig:

$Mv_1 = Mv_2 \Rightarrow M(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$.

Wir können also die Umkehroperation $v = M^{-1}w$ definieren. (Um genau zu sein, wurde hier nur „Injektivität" bewiesen.)

Es folgt:

* das lineare Gleichungssystem $Mv = w$ hat eine eindeutige Lösung, $v = M^{-1}w$, genau dann wenn $\det M \neq 0$ gilt.

* falls dagegen $\det M = 0$ gilt, gibt es auch nichttriviale Spaltenvektoren $v_a \neq 0$ die die Gleichung $Mv_a = 0$ erfüllen. Das heisst, die allgemeine Lösung enthält unbestimmte Konstanten, $v = \sum_a c_a v_a + v_s$, wie bei linearen Differenzialgleichungen.

* Seien m_i; $i = 1, \ldots, n$, Spaltenvektoren. Sie sind linear unabhängig genau dann, wenn $\Delta(m_1, \ldots, m_n) \neq 0$ gilt.

Beweis: die definierende Gleichung $\sum_{i=1}^{n} a_i m_i = 0$ kann als

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden; die einzige Lösung ist $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, falls Determinante ungleich null ist. $\square$