## 3.4 Inverse Matrix [Lang & Pucker 5.2 (3.2)]

Betrachte Komposition (Seite 38): $(M \circ N)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} N_{kj}$.
(Wenn wir eine Basis gewählt haben und mit Matrizen („Vierecken") umgehen, wird „$\circ$" oft nicht explizit gezeigt.) Falls $\exists\, N$ so dass

$$NM = MN = \mathbb{1}_{n \times n}$$

gilt, dann ist $N$ die <u>Inverse</u> von $M$; sie wird mit $M^{-1}$ bezeichnet.

Falls $M^{-1}$ existiert, ist $M$ „nichtsingulär" bzw. „regulär" bzw. „invertierbar".

<u>Sätze:</u>

* $NM = \mathbb{1} \Rightarrow MN = \mathbb{1}$

  [Beweis: $w = Mv$ | operiere mit $N$ auf beide Seiten
  $\Rightarrow Nw = \overbrace{NM}^{\mathbb{1}} v = v$
  Es folgt: $w = Mv = MNw \quad \forall\, w$
  wähle $w = e_j$ $\Rightarrow (MN)_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow MN = \mathbb{1}$ $\square$]

* $M^{-1}$ existiert $\Rightarrow$ $M^{-1}$ ist eindeutig.

  [Seien $N'$ und $N$ Inversen von $M$. Dann gilt:
  $N' = N' \mathbb{1} = N'(MN) = (N'M)N = \mathbb{1} N = N$ $\square$.]

* $(M^{-1})^{-1} = M$.

  [$M M^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow \square$.]

* $(MN)^{-1} = N^{-1} M^{-1}$

  [$N^{-1} M^{-1} MN = N^{-1} \mathbb{1} N = \mathbb{1} \Rightarrow \square$.]

<u>Beispiele:</u>

* Für eine orthogonale Matrix gilt $O^T O = O O^T = \mathbb{1}$,
  d.h. $O^{-1} = O^T$.

  [Für eine unitäre Matrix gilt $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$,
  d.h. $U^{-1} = U^\dagger$.]

* Für $\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $\sigma_1 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
  d.h. $\sigma_1^{-1} = \sigma_1$.

Wie findet man $M^{-1}$ im Allgemeinen?

(i) theoretisch: durch Adjunkte und Determinante (verwandt mit Laplace / Seite 42)

Seite 41: $\det M = \sum_{j_1,\dots,j_n} \varepsilon_{j_1\dots j_n} M_{1j_1} \cdots M_{nj_n}$ (Summe über Spalten)

$= \sum_{i_1,\dots,i_n} \varepsilon_{i_1\dots i_n} M_{i_1 1} \cdots M_{i_n n}$. (Summe über Zeilen)

Betrachte Abhängigkeit der Determinante von Elementen der Zeile $i$:

$$f(i) := \sum_{j_1,\dots,j_n} \varepsilon_{j_1\cdots j_n} M_{1j_1} \cdots M_{ij_i} \cdots M_{nj_n}.$$

Falls $M_{ij_i} \to M_{kj_i}$, mit $k \neq i$, verschwindet das Ergebnis wegen Antisymmetrie (vgl. Gauß-Algorithmus auf Seite 42). Das heisst,

$$f(k) = \delta_{ki} * \det M$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j_i} M_{kj_i} \underbrace{\sum_{j_1,\dots,\hat{j_i},\dots,j_n} \varepsilon_{j_1\dots j_n} M_{1j_1} \cdots \hat{M}_{ij_i} \cdots M_{nj_n}}_{=: (\mathrm{adj}(M))_{j_i i} = (\mathrm{cof}(M))_{ij_i}} = \delta_{ki} * \det M \quad \forall k,i$$

„nicht da"

„nicht da"

Adjunkte = $(\text{Kofaktor})^T$ (vgl. Seite 42)

$$\Leftrightarrow \sum_{j_i} M_{kj_i} (\mathrm{adj}(M))_{j_i i} = (\mathbb{1}_{n\times n})_{ki} * \det M \quad \forall k,i \in \{1,\dots,n\}$$

Satz: $\det M \neq 0 \Leftrightarrow M$ ist regulär (d.h. $\exists M^{-1}$)

Beweis: „$\Rightarrow$" Dividiere obige Gleichung durch $\det M$

$$\Rightarrow \boxed{M^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(M)}{\det(M)}.}$$

„$\Leftarrow$" $M$ ist regulär $\Leftrightarrow \exists M^{-1}$ mit $MM^{-1} = \mathbb{1}$

Nehme Determinante auf beiden Seiten

$\Rightarrow \det(M)\det(M^{-1}) = 1$.

Weil $M^{-1}$ existiert, ist $\det(M^{-1}) \neq \infty$, und derhalb gilt unbedingt $\det(M) \neq 0$. □

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\mathrm{cof}(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \det(M) = ad - bc$$

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$