Sätze:

* Sei $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ das „Levi-Civita-Symbol" (1873-1941)

$$\varepsilon_{i_1\dots i_n} := \begin{cases} +1\,, & \text{falls } (i_1,i_2,\dots,i_n)=(1,2,\dots,n) \text{ oder eine symmetrische Permutation davon, d.h. mit einer geraden Anzahl von Vertauschungen} \\ -1\,, & \text{falls } (i_1,i_2,\dots,i_n) \text{ aus } (1,2,\dots,n) \text{ durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen entsteht} \\ 0\,, & \text{falls es zwei (oder mehrere) gleiche Indizes gibt.} \end{cases}$$

Zum Beispiel: $\varepsilon_{12}=1,\ \varepsilon_{21}=-1,\ \varepsilon_{11}=0,\ \varepsilon_{22}=0$.

Dann gilt: $\det M = \sum_{i_1,\dots,i_n} \varepsilon_{i_1\dots i_n} M_{i_1 1} M_{i_2 2} \cdots M_{i_n n}$.

„Leibniz-Formel" (1646-1716)

$$\Delta(m_1,\dots,m_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} \Delta\left(M_{i_1 1} e_{i_1},\dots, M_{i_n n} e_{i_n}\right) \overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{i_1,\dots,i_n} M_{i_1 1}\cdots M_{i_n n}\, \Delta(e_{i_1},\dots,e_{i_n}) \overset{\text{Antisymmetrie}}{=} \sum_{i_1,\dots,i_n} M_{i_1 1}\cdots M_{i_n n}\, \varepsilon_{i_1\dots i_n} \underbrace{\Delta(e_1,\dots,e_n)}_{=1 \text{ wegen Normierung.}} \quad \square.$$

(* Es gilt auch: $\det M = \frac{1}{n!} \sum_{i_1,\dots,i_n} \sum_{j_1,\dots,j_n} \varepsilon_{i_1\dots i_n}\varepsilon_{j_1\dots j_n} M_{i_1 j_1}\cdots M_{i_n j_n}$.)

* $\det M^T = \det M$

$$\det M^T = \sum_{i_1,\dots,i_n} \underbrace{\varepsilon_{i_1\dots i_n}}_{\text{„sign}(\sigma)\text{"}} \underbrace{M_{1 i_1} M_{2 i_2}\cdots M_{n i_n}}$$

Umordne jeden Term so dass der zweite Index nach rechts wächst. Die ersten Indizes sind dann in einer gerade (sign σ=+1) oder ungerade (sign σ=−1) permutierten Reihenfolge. □

* $\det(M\circ N) = \det M * \det N$.

$$M=(m_1,\dots,m_n)\ ; \quad \det M = \Delta(m_1,\dots,m_n)\ ;$$

$$M\circ N = \Big(\sum_{i_1} m_{i_1} N_{i_1 1},\ \sum_{i_2} m_{i_2} N_{i_2 2},\ \dots \sum_{i_n} m_{i_n} N_{i_n n}\Big)$$

Spalte

$$\det(M\circ N) \overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{i_1,\dots,i_n} \Delta(m_{i_1},\dots,m_{i_n})\, N_{i_1 1}\cdots N_{i_n n} \overset{\text{Antisymmetrie}}{=} \sum_{i_1,\dots,i_n} \varepsilon_{i_1\dots i_n}\, \Delta(m_1,\dots,m_n)\, N_{i_1 1}\cdots N_{i_n n} = \underbrace{\Big(\sum_{i_1,\dots,i_n} \varepsilon_{i_1\dots i_n} N_{i_1 1}\cdots N_{i_n n}\Big)}_{\det N} \cdot \underbrace{\Delta(m_1,\dots,m_n)}_{\det M}$$

* Determinante ist invariant in einer orthogonalen Basistransformation.

$$\det M' = \det(O^T M O) = \det O^T \det M \det O = \det O^T \det O \det M = \underbrace{\det(\underbrace{O^T O}_{\mathbb{1}})}_{1} \det M. \quad \square$$

Wie bestimmt man die Determinante in der Praxis?

Methode 1: „Laplacescher Entwicklungssatz" (1749–1827):

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} M_{ij} \, \underbrace{\overbrace{(-1)^{i+j}}^{\text{„Schachbrettvorzeichen"}} \det \hat{M}_{ij}}_{\text{„Kofaktor"}} , \quad j \text{ beliebig}$$

$\hat{M}_{ij}$: wie M_{ij} aber Zeile i und Spalte j weggenommen

(kann auch i fixieren und über j summieren)

[Aus der Definition:

$$\det M = \sum_{i_1 \ldots i_n} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} M_{i_1 1} \cdots M_{i_n n}$$

$$= \sum_{i_j=1}^{n} M_{i_j j} \underbrace{\sum_{\substack{i_1, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_n \\ \text{„weg"}}} \underbrace{\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}}_{\pm 1 \text{ je nach Permutation}} M_{i_1 1} \cdots \underbrace{\hat{M}_{i_j j}}_{\text{„ohne } M_{i_j j}\text{"}} \cdots M_{i_n n}}_{\pm \det \hat{M}_{i_j j}}$$

]

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} =: \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 4 * \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + 7 * \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

wähle diese Spalte

$$= 1 * (5*0 - 8*6) - 4 * (2*0 - 3*8) + 7 * (2*6 - 5*3)$$

$$= -48 + 96 - 21 = 96 - 69 = \underline{27}.$$

Methode 2: „Gauß-Algorithmus" (1777–1855):

Kann zu jeder Spalte [bzw. Zeile] eine beliebige Linearkombination anderer Spalten [bzw. Zeilen] hinzufügen, um die Determinante zu vereinfachen.

[$$\Delta\Big(m_1, \ldots, m_i + \sum_{k \neq i} c_k m_k, \ldots, m_n\Big) = \Delta(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n) + \sum_{k \neq i} c_k \underbrace{\Delta(m_1, \ldots, m_k, \ldots, m_n)}_{\text{verschwindet wegen Antisymmetrie}}$$]

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-4) \\ \cdot(-7) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 1(-3)(-9) = 27.$$

Falls eine Spalte oder Zeile verschwindet, ist $\det = 0$.

Bei großen Matrizen (in der Regel schon $n \geq 4$) ist die zweite Methode viel effektiver als die erste Methode.

— ∘ — ∘ —