3.3 Spur, Determinante [Lang & Pucker 5.1 (3.1)]

Seite 38: Nach Wahl einer Basis kann eine lineare Abbildung als Matrix dargestellt werden:

1902–1984

$$M\vec{v} = \vec{w} \quad \Rightarrow \quad M_{ij} := (M)_{ij} := \vec{e}_i \cdot M\vec{e}_j \quad (= \langle e_i | M | e_j \rangle \text{ „Dirac-Notation"})$$

Wir betrachten im Folgenden M als „Viereck", mit Komponenten M_{ij}.

Zeile Spalte

Definitionen: die transponierte Matrix wird als

$$(M^T)_{ij} := (M)_{ji} = M_{ji}$$

definiert. Für Vektoren:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^T = (v_1 \cdots v_n)$$

Spaltenvektor Reihenvektor

Notabene: $\vec{w} := \sum_i w_i \vec{e}_i$

Spaltenvektor: $w := \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

Es gilt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = (v_1 \cdots v_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v^T w$.

Eine Matrix ist $\begin{cases} \text{symmetrisch} & \text{falls } M^T = M, \quad \text{z.B. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \\ \text{antisymmetrisch} & \text{falls } M^T = -M, \quad \text{z.B. } \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$

Sätze:

* $(M^T)^T = M$
* $(M+N)^T = M^T + N^T$
* $(M \circ N)^T = N^T \circ M^T$

wird normalerweise nicht gezeigt

[Beweis: Seite 38: $(M \circ N)_{ij} = \sum_k M_{ik} N_{kj}$

$\Rightarrow (M \circ N)^T_{ij} = \sum_k M_{jk} N_{ki} = \sum_k (N^T)_{ik} (M^T)_{kj}$ □]

(Verallgemeinerung:

* die konjugierte Matrix: $(M^*)_{ij} := (M_{ij})^*$ Komplex-Konjugierung
* die adjungierte Matrix: $(M^+)_{ij} := (M_{ji})^*$, d.h. $M^+ = (M^*)^T$.
* eine Matrix ist $\begin{cases} \text{hermitesch} & \text{falls } M^+ = M, \quad \text{z.B. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \text{antihermitesch} & \text{falls } M^+ = -M, \quad \text{z.B. } \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$)

Die transponierten Matrizen spielen eine wichtige Rolle bei Drehungen.
Eine Drehung := eine lineare Abbildung, die das Skalarprodukt zwischen zweier Vektoren invariant lässt:

$$M\vec{x} \cdot M\vec{y} = (Mx)^T My = x^T M^T M y \overset{!}{=} x^T y \quad \forall \vec{x}, \vec{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad M^T M = \mathbb{1}$$

Eine Matrix mit dieser Eigenschaft wird orthogonal genannt.
(Verallgemeinerung: $M^+ M = \mathbb{1} \Rightarrow M$ ist unitär.)

(Für Basisvektoren: $\vec{e}_i' := M\vec{e}_i$

$\Rightarrow \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ falls $M^T M = \mathbb{1}$ gilt

$\Rightarrow \{\vec{e}_i'\}$ bilden eine andere orthonormierte Basis!)

Definition: die Spur einer Matrix wird als

$$\mathrm{Sp}\, M := \sum_{i=1}^{n} M_{ii}$$

definiert. (Eine andere Bezeichnung: $\mathrm{tr}\, M$)

Sätze:

* $\mathrm{Sp}\, M^T = \mathrm{Sp}\, M$ $\quad \left[\mathrm{Sp}\, M^T = \sum_i (M^T)_{ii} = \sum_i M_{ii} = \mathrm{Sp}\, M \right]$
* $\mathrm{Sp}(MN) = \mathrm{Sp}(NM)$ $\quad \left[\mathrm{Sp}(MN) = \sum_{i,k} M_{ik} N_{ki} = \sum_{i,k} N_{ki} M_{ik} = \mathrm{Sp}(NM) \right]$
* Spur ist invariant in einer orthogonalen Basistransformation.

$$\vec{e}_i' := O\vec{e}_i \quad ; \quad O^T O = \mathbb{1}$$

In der neuen Basis:

$$M'_{ij} = \vec{e}_i' \cdot M \vec{e}_j' = e_i'^T M e_j' = (Oe_i)^T M O e_j$$

$$= e_i^T O^T M O e_j = (O^T M O)_{ij}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sp}[M'] = \mathrm{Sp}[O^T M O] \underset{\mathrm{Sp}(MN)=\mathrm{Sp}(NM)}{=} \mathrm{Sp}[O O^T M] \underset{\text{Aufgabe 10.2: } OO^T = \mathbb{1}}{=} \mathrm{Sp}[M].$$

Definition: Wir drücken M als $M = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} =: (m_1, \dots, m_n)$ aus.

Spaltenvektoren

Die Determinante $\det M \in \mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$\det M = \Delta(m_1, \dots, m_n) : V \times V \times \dots \times V \to \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\Delta(m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_n) = -\Delta(m_1, \dots, m_j, \dots, m_i, \dots, m_n)$ } antisymmetrisch

(2) $\Delta(m_1, \dots, \lambda m_i, \dots, m_n) = \lambda\, \Delta(m_1, \dots, m_i, \dots, m_n)$ } linear

(3) $\Delta(m_1, \dots, m_i + m_j, \dots, m_n) = \Delta(\dots, m_i, \dots) + \Delta(\dots, m_j, \dots)$ } linear

(4) $\Delta(e_1, \dots, e_n) = \det \mathbb{1} = 1$ } normiert

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \Delta(a_{11} e_1 + a_{21} e_2,\ a_{12} e_1 + a_{22} e_2)$$

$$\underset{\text{Linearität}}{=} a_{11} a_{12}\, \Delta(e_1, e_1) + a_{21} a_{12}\, \Delta(e_2, e_1) + a_{11} a_{22}\, \Delta(e_1, e_2) + a_{21} a_{22}\, \Delta(e_2, e_2)$$

Antisymmetrie: $\Delta(e_1, e_1) = -\Delta(e_1, e_1) = 0$!
$\Delta(e_2, e_1) = -\Delta(e_1, e_2)$

$$= (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})\, \Delta(e_1, e_2)$$

$$\underset{\text{Normierung}}{=} a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$