3.2 Skalarprodukt [Lang & Pucker 5.3.2 (3.3.2)]

In vielen Vektorräumen kann eine weitere Struktur definiert werden, ein Skalarprodukt; dieses ist eine Abbildung $V\times V \to \mathbb{R}$, $(\vec{v},\vec{w}) \mapsto \vec{v}\cdot\vec{w}$, mit den Eigenschaften

* $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{v}$ („kommutativ")
* $\vec{v}\cdot(a_1\vec{w}_1 + a_2\vec{w}_2) = a_1\,\vec{v}\cdot\vec{w}_1 + a_2\,\vec{v}\cdot\vec{w}_2$ („linear")
* $|\vec{v}|^2 := \vec{v}\cdot\vec{v} \geq 0$ ($|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$ „die Norm")
* $|\vec{v}|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

Es folgt:

* $|\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq |\vec{v}||\vec{w}|$ „Cauchy- Schwarzsche Ungleichung" (1789-1857) (1843-1921)

Beweis: $0 \leq (\lambda\vec{v}+\vec{w})\cdot(\lambda\vec{v}+\vec{w}) = \lambda^2|\vec{v}|^2 + 2\lambda\vec{v}\cdot\vec{w} + |\vec{w}|^2$.
Wähle $\lambda = -\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|^2}$ und multipliziere mit $|\vec{v}|^2 > 0$.

$$\Rightarrow 0 \leq (\vec{v}\cdot\vec{w})^2 - 2(\vec{v}\cdot\vec{w})^2 + |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2$$
$$\Leftrightarrow (\vec{v}\cdot\vec{w})^2 \leq |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2 \Rightarrow |\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq |\vec{v}||\vec{w}| \quad \square.$$

* $|\vec{v}+\vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$ „Dreiecksungleichung"

Beweis: $|\vec{v}+\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{w} + |\vec{w}|^2 \leq |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}\cdot\vec{w}| + |\vec{w}|^2$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{w}| + |\vec{w}|^2 = (|\vec{v}|+|\vec{w}|)^2 \Rightarrow \square.$$

Zwei Vektoren sind orthogonal zueinander, falls $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$ gilt.
Eine Basis ist orthogonal, falls $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = 0$ für $\forall\ i\neq j$ gilt.
Wenn auch $|\vec{e}_i| = 1$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, geht es um eine orthonormale Basis.

Eine orthonormale Basis kann, ausgehend von einer beliebigen Basis, $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$, durch das „Gram- Schmidt- Verfahren" konstruiert werden: (1850-1916) (1876-1959)

$$\vec{b}_1 := \vec{a}_1\ ;\quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|^2}\vec{b}_1\ ;\quad \vec{b}_k = \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\vec{a}_k\cdot\vec{b}_i}{|\vec{b}_i|^2}\vec{b}_i\ .$$

Nachher noch $\vec{e}_i := \frac{\vec{b}_i}{|\vec{b}_i|}$.

In einer orthonormalen Basis gilt:
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \Big(\sum_{i=1}^n v_i\vec{e}_i\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^n w_j\vec{e}_j\Big) = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j \underbrace{\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n v_i w_i\ .$$

$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$ „Kronecker- Delta" (1823-1891)

Einen Winkel zwischen zweier Vektoren können wir jetzt durch
$$\cos\theta := \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$
definieren; wegen Cauchy- Schwarz gilt $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

— · —

Mit Hilfe der eingeführten Begriffe kehren wir zu linearen Abbildungen bzw. Matrizen zurück:

$$M: V \to V \ , \quad \vec{v} \mapsto \vec{w} = M\vec{v} \ .$$

Das Ziel ist es, die auf Seite 35 eingeführte Notation zu begründen.

Wir benutzen eine besondere orthonormale Basis $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$.
Linearität impliziert:

$$\vec{w} = \sum_{k=1}^{n} w_k \vec{e}_k = M\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \, M\vec{e}_j \ .$$

Nehme Skalarprodukt mit $\vec{e}_i$ und benutze $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$

$$\Rightarrow \quad w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot M\vec{e}_j}_{=:\, M_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} v_j \ .$$

Notation:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}v_1 + \dots + M_{1n}v_n \\ \vdots \\ M_{n1}v_1 + \dots + M_{nn}v_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1j} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{i1} & \cdots & M_{ij} & \cdots & M_{in} \\ \vdots & & & & \\ M_{n1} & \cdots & M_{nj} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

Zeile i Spalte j

Spaltenvektor

Besondere Beispiele: „Nullmatrix" $= O_{n\times n} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$; $\quad O_{n\times n}\vec{v} = \vec{0} \ \forall \vec{v}$.

„Einheitsmatrix" $= \mathbb{1}_{n\times n} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$; $\quad \mathbb{1}_{n\times n}\vec{v} = \vec{v} \ \forall \vec{v}$.

Die Matrizen bilden selbst einen (abstrakten) Vektorraum:

$$(M+N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij} \ ;$$
$$(aM)_{ij} = a\, M_{ij} \ ;$$
$$(0)_{ij} = 0 \quad \forall\, i,j \ ;$$
$$(-M)_{ij} = -M_{ij} \ .$$

Es gibt aber auch eine zusätzliche Struktur, Komposition:

$$(M \circ N)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} N_{kj}$$

i j

[Beweis: $(M\circ N)_{ij} = \vec{e}_i \cdot (M\circ N)\vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot (M(\underbrace{N\vec{e}_j}_{\sum_k \vec{e}_k N_{kj}}))$

$= \sum_k \underbrace{\vec{e}_i \cdot M\vec{e}_k}_{M_{ik}} N_{kj}$.]

Die Existenz dreier Strukturen (Summe, Skalarmultiplikation, Komposition) definiert eine „Algebra". (Vergleiche auch mit „Körper", Seite 5.)