3. Lineare Algebra

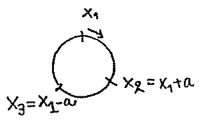
3.1 Vektorräume, lineare Abbildungen [Lang & Pucker 5.3.1 (3.3.1)]

Lineare Differenzialgleichung: $\underbrace{L}_{\text{Diff. operator}}\ \underbrace{y(x)}_{\text{Funktion (unbekannt)}} = \underbrace{f(x)}_{\text{Funktion (bekannt)}}$

Diese allgemeine Struktur taucht sehr häufig auf: $\underbrace{M}_{\text{lineare Abbildung bzw. „Matrix"}}\ \underbrace{\vec{v}}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\vec{w}}_{\text{Vektor}}$

Beispiele:

* „diskretisierte" lineare Differenzialgleichung bzw. Differenzengleichung

$x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ 

; $L\,y(x) := \frac{dy}{dx} \longrightarrow \frac{y(x+a) - y(x-a)}{2a}$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{y(x_1+a) - y(x_1-a)}{2a} = f(x_1) \\[2mm] \frac{y(x_2+a) - y(x_2-a)}{2a} = f(x_2) \\[2mm] \frac{y(x_3+a) - y(x_3-a)}{2a} = f(x_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} & +\frac{1}{2a}y(x_2) & -\frac{1}{2a}y(x_3) & = f(x_1) \\ -\frac{1}{2a}y(x_1) & & +\frac{1}{2a}y(x_3) & = f(x_2) \\ +\frac{1}{2a}y(x_1) & -\frac{1}{2a}y(x_2) & & = f(x_3) \end{array}\right.$$

Neue Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{1}{2a} & 0 & +\frac{1}{2a} \\ +\frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} y(x_1) \\ y(x_2) \\ y(x_3) \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix}}_{\vec{w}}$$

* Partialbruchzerlegung bzw. lineare Gleichungssysteme

$$\frac{1}{(1+x)^2 x} = \underbrace{\frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{x}}\ ; \quad A, B, C = ?$$

$$\frac{1}{(1+x)^2 x}\left\{x\,A + x(1+x)\,B + (1+x)^2 C\right\}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^2 x}\left\{x\,(A + B + 2C) + x^2 (B + C) + C\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} A + B + 2C &= 0 \\ B + C &= 0 \\ C &= 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}}$$

* Drehungen $\rightarrow$ Aufgabe 9.3.

Die „Vektoren" dieser Konstruktion bilden einen Vektorraum, V.
Einige wichtige Eigenschaften von V sind:

* $\vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in V$ („Addition")
* $a \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V \Rightarrow a\vec{v} \in V$ („Skalarmultiplikation")
* $\exists\ \vec{0} \in V$ so dass $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$ („Nullvektor")
* $\exists\ -\vec{v} \in V$ so dass $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in V$ („inverser Vektor")
*

(Es gibt auch weitere mathematische Axiome, die aber in den praktischen Anwendungen „automatisch" erfüllt sein werden.)

Wir können Additionen und Skalarmultiplikationen mehrmals durchführen, und so eine Linearkombination bilden: $\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i \in V$.

Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sind linear unabhängig, falls gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}.$$

(Falls dagegen $a_j \neq 0$ gefunden werden kann, kann $\vec{v}_j$ als Linearkombination von $\vec{v}_i$, $i \neq j$, ausgedrückt werden: $\vec{v}_j = -\frac{1}{a_j} \sum_{i \neq j} a_i \vec{v}_i$.)

Falls die Vektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ (i) linear unabhängig sind;
(ii) den Vektorraum V „aufspannen",
d.h. $\forall \vec{v} \in V$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ ausgedrückt werden,

dann bilden sie eine „Basis" bzw. ein „Fundamentalsystem".
Die Dimension des Vektorraums ist $\dim V = n$
(d.h. die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren).

Nach der Wahl einer Basis kann jeder Vektor eindeutig als $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$ ausgedrückt werden.

[Beweis: $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{e}_i \Rightarrow \vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} (v_i - w_i) \vec{e}_i$
$\xRightarrow{\text{lineare Unabhängigkeit}} v_i = w_i \quad \forall\ i = 1, \ldots, n.$]

Die Wahl der Basis selbst ist aber nicht eindeutig.

[Beispiel: falls $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ eine Basis ist, ist $\{\vec{e}_1' := \vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{e}_2' := \vec{e}_1 - \vec{e}_2\}$ eine andere Möglichkeit, wie durch Betrachtung von (i) und (ii) gezeigt werden kann.]

Der „normale Raum", $\mathbb{R}^3$, ist auch ein Vektorraum.
Basisvektoren: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \to \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ oder $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

——— ∘ ——— ∘ ———