2.12 Lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

[Lang & Pucker 6.3.2]

Um weiter zu kommen vereinfachen wir die Problemstellung, und setzen $p(x), q(x) \to \text{const}$:

$$\boxed{y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = f(x).}$$

In diesem Fall können $y_1(x)$ und $y_2(x)$ explizit ermittelt werden!

Es gibt drei unterschiedliche Fälle :

(i) Nehme Ansatz $y(x) = e^{rx}$. Homogene DG:

$$(r^2 + pr + q)\underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} = 0 \iff r^2 + pr + q = 0 \qquad \text{„charakteristische Gleichung"}$$

Falls $q < \frac{p^2}{4}$ gilt, gibt es zwei Lösungen: $r = r_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Wir können $y_1(x) = e^{r_+ x}$, $y_2(x) = e^{r_- x}$ wählen ; sind unabhängig,

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(r_- - r_+)x} = e^{-2x\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \neq \text{const}.$$

(ii) Falls $q = \frac{p^2}{4}$ gilt, ist $y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}$ eine Lösung,

aber die zweite unabhängige Lösung $y_2(x)$ muß noch gefunden werden.

Variation der Konstanten:

$$y_2(x) = C(x)\, e^{-\frac{p}{2}x}$$
$$y_2'(x) = C'(x) e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2} C(x) e^{-\frac{p}{2}x}$$
$$y_2''(x) = C''(x) e^{-\frac{p}{2}x} - pC'(x) e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4} C(x) e^{-\frac{p}{2}x}$$

$$\Rightarrow \quad y_2'' + p y_2' + \frac{p^2}{4} y_2 = \left[C'' - pC' + \frac{p^2}{4} C + pC' - \frac{p^2}{2} C + \frac{p^2}{4} C \right] e^{-\frac{p}{2}x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad C'' = 0 \quad \Rightarrow \quad C' = \alpha \quad \Rightarrow \quad C = \alpha x + \beta .$$

Nur der Teil mit α bringt etwas Neues $\Rightarrow$ $y_2(x) = x\,e^{-\frac{p}{2}x}$.

(iii) Falls $q > \frac{p^2}{4}$ gilt, nehmen wir einen neuen Ansatz:

$$y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x} \cos\left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x\right),$$
$$y_2(x) = e^{-\frac{p}{2}x} \sin\left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x\right).$$

Physikalisch: gedämpfte ($p>0$) oder sich verstärkende ($p<0$) Schwingungen.

Beweis für y_1 (y_2 ähnlich) :

$$y_1' = -\frac{p}{2} e^{-\frac{p}{2}x} \cos(\ldots) - \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, e^{-\frac{p}{2}x} \sin(\ldots)$$
$$y_1'' = \frac{p^2}{4} e^{-\frac{p}{2}x} \cos(\ldots) + p\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, e^{-\frac{p}{2}x} \sin(\ldots) + \left(\frac{p^2}{4} - q\right) e^{-\frac{p}{2}x} \cos(\ldots)$$

$$\Rightarrow \quad y_1'' + p y_1' + q y_1 = e^{-\frac{p}{2}x} \cos(\ldots) \left[\frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} + q \right]$$
$$+ \; e^{-\frac{p}{2}x} \sin(\ldots) \left[p\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} - p\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right] = 0 .$$

Für alle Fälle können also zwei unabhängige Lösungen gefunden werden, so dass die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung jetzt zur Verfügung steht.

Es bleibt übrig, eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden. Im Prinzip geht dies durch Variation der Konstanten, wie auf Seite 32. In der Praxis ist es häufig einfacher, eine Lösung durch einen angemessenen Ansatz zu erraten.

„harmonischer Oszillator"

Beispiel: $$y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = b\sin(\omega x).$$

„gedämpft" (für $k>0$) „getrieben"

Seite 33: $q \to \omega_0^2$, $p \to 2k$, $\frac{p^2}{4} \to k^2$

Falls $k^2 < \omega_0^2$, geht es um Fall (iii), d.h.

$$y_a(x) = C_1 e^{-kx}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}\,x\right) + C_2 e^{-kx}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}\,x\right).$$

Für $y_s(x)$ nehmen wir den Ansatz

$$y_s(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x),$$
$$y_s'(x) = -\omega A\sin(\omega x) + \omega B\cos(\omega x),$$
$$y_s''(x) = -\omega^2 A\cos(\omega x) - \omega^2 B\sin(\omega x).$$

$$\Rightarrow \cos(\omega x)\left[-\omega^2 A + 2k\omega B + \omega_0^2 A\right] + \sin(\omega x)\left[-\omega^2 B - 2k\omega A + \omega_0^2 B\right] = b\sin(\omega x)$$

$$\Rightarrow B = \frac{(\omega^2-\omega_0^2)A}{2k\omega} \quad \& \quad (\omega_0^2-\omega^2)B - 2k\omega A = b$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{2k\omega} + 2k\omega\right]A = -b$$

$$\Rightarrow A = \frac{-2k\omega b}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4k^2\omega^2} \quad \& \quad B = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)b}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4k^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-kx}\left[C_1\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}\,x\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}\,x\right)\right] - \frac{b}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4k^2\omega^2}\left[2k\omega\cos(\omega x) + (\omega^2-\omega_0^2)\sin(\omega x)\right].$$

Hinweise für andere inhomogenen Terme:

* f Polynom des Grades n $\Rightarrow$ y_s Polynom des Grades n oder $n+1$.
* $f \propto e^{\alpha x}$ $\Rightarrow$ $y_s \propto e^{\alpha x}$ ($\alpha \neq r_\pm$), $x e^{\alpha x}$ ($\alpha = r_+$ oder $\alpha = r_-$), $x^2 e^{\alpha x}$ ($\alpha = r_+ = r_-$) $\left(\frac{p^2}{4} = q\right)$.
* $f = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ $\Rightarrow$ $y_s = C\cos\omega x + D\sin\omega x$ ($p \neq 0$ oder $\omega^2 \neq q$), $x\left(C\cos\omega x + D\sin\omega x\right)$ ($p = 0$ und $\omega^2 = q$).
* $f = f_1 + f_2$ $\Rightarrow$ $y_s = y_{s1} + y_{s2}$ („Superposition von Teillösungen").
