2.11 Lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung [Lang & Pucker 6.3.1, 6.3.3]

DGs zweiter Ordnung, $G(y'', y', y, x) = 0$, sind im Allgemeinen schwieriger als DGs erster Ordnung, es sei denn, sie können als DGs erster Ordnung umgeschrieben werden.

Beispiele: (i) $G(y'', y', x) = 0$, d.h. keine Abhängigkeit von y.
Führe neue abhängige Variable $z := y'$ ein: $y'' = z'$.
$\Rightarrow$ $G(z', z, x) = 0$, d.h. DG erster Ordnung.
Nachher noch y durch Integration: $y(x) = \int^x dt\, z(t)$.

(ii) $G(y'', y', y) = 0$, d.h. keine Abhängigkeit von x.
Sei wieder $z := y'$; außerdem gilt $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$.
$\Rightarrow$ $G\left(\frac{dz}{dy} z, z, y\right) = 0$, d.h. DG erster Ordnung.
Nachher noch y aus $\frac{dy}{dx} = z(y)$ $\Rightarrow$ $\int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\tilde{y}}{z(\tilde{y})} = \int_{x_0}^{x} d\tilde{x}$.

$\Rightarrow$ Aufgabe 8.4 !

Im Folgenden beschränken wir uns auf lineare DGs zweiter Ordnung:

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right)}_{=:L} y(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{inhomogener Term}}$$

Im Gegensatz zur Seite 29 gibt es hier keine Lösung als bestimmtes Integral. (Vielmehr werden viele spezielle Funktionen als Lösungen von besonderem L definiert.)
Trotzdem können viele allgemeine Aussagen über die Lösungen gemacht werden:

(i) allgemeine Lösung der inhomogenen DG
= allgemeine Lösung der homogenen DG $(Ly = 0)$
+ spezielle Lösung der inhomogenen DG.

Beweis: wie auf Seite 29.

(ii) $Ly = 0$ führt zu zwei Integrationskonstanten (weil 2. Ordnung); ihre allgemeine Lösung ist der Form $y_a(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Wegen Linearität — Integrationskonstanten

(iii) y_1, y_2 sind unabhängig (bilden eine „Basis" bzw. ein „Fundamentalsystem")

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} \neq 0$$

(Häufig ausgedrückt als: $W(y_1, y_2) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} := y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$.)

„Wronski-Determinante"
1776–1853

(iv) Sei $y_1(x)$ eine Lösung der homogenen DG. Die zweite Lösung $y_2(x)$ kann durch Variation der Konstanten (vgl. Seite 29) bestimmt werden.

Beispiel: $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$.

Eine Lösung: $y_1(x) := x$ $\quad [\, y_1' = 1,\ y_1'' = 0 \,]$.

Ansatz: $y_2(x) = C(x)\, x$.

$\Rightarrow y_2' = C + xC'$; $y_2'' = 2C' + xC''$

Einsatz in DG

$\Rightarrow 2C' + xC'' + \cancel{\frac{1}{x}C} + C' - \cancel{\frac{1}{x}C} = 0$

$\Leftrightarrow C'' = -\frac{3}{x} C'$.

Sei $z := C'$

$\Rightarrow \frac{dz}{z} = -3 \frac{dx}{x} \Leftrightarrow d \ln|z| = -3\, d\ln|x|$

$z = \frac{1}{x^3}$ (spezielle Lösung reicht)

Integriere C:

$z = \frac{dC}{dx} = \frac{1}{x^3} \Rightarrow C = -\frac{1}{2x^2}$.

Zurück zur y_2:

$y_2 = C(x) \cdot x = \frac{\text{const.}}{x}$.

Überprüfe Unabhängigkeit:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{const}}{x^2}\right) \neq 0$.

Allgemeine Lösung: $y_a(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x}$.

(v) Seien $y_1(x), y_2(x)$ unabhängige Lösungen der linearen DG. Eine spezielle Lösung der inhomogenen DG kann wieder durch Variation der Konstanten gefunden werden.

Beweis (Skizze): Ansatz $y_s(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$ (zwei Funktionen!)

$\Rightarrow y_s' = C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1 y_1' + C_2 y_2'$

Wähle jetzt: $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \quad \forall x$. $(*)$

(eine freie Funktion bleibt übrig)

$\Rightarrow y_s'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'$

Einsatz in DG: $y_s'' + p y_s' + q y_s = f$.

Benutze $y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 = y_2'' + p y_2' + q y_2$

$\Rightarrow C_1' y_1' + C_2' y_2' = f \quad \forall x$. $(**)$

$y_1' (*) - y_1 (**) \Rightarrow C_2' = \frac{-y_1 f}{y_1' y_2 - y_2' y_1}$

$\neq 0!$ (vgl. (iii)) $\neq 0!$

$y_2' (*) - y_2 (**) \Rightarrow C_1' = \frac{-y_2 f}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}$

Von hier können C_1, C_2 integriert werden.