2.10 Allgemeine Lösung linearer Differenzialgleichung erster Ordnung [Lang & Pucker 6.2]

$$y'(x) + p(x)y(x) + q(x) = 0.$$

„inhomogener Term" (homogene DG: $y' + py = 0$.)

Es geht in drei Schritten:

(i) **Satz:** allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung
= allgemeine Lösung der homogenen Gleichung
+ spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Beweis: Seien y_1 und y_2 zwei unterschiedliche Lösungen der inhomogenen Gleichung: $y_1' + py_1 + q = 0$, $y_2' + py_2 + q = 0$. Subtrahiere Gleichungen $\Rightarrow (y_1 - y_2)' + p(y_1 - y_2) = 0$. D.h., Unterschiede bzw. Unbestimmtheiten genügen unbedingt der homogenen Gl. $\Rightarrow \square$

(ii) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: (y_a)

$$y_a'(x) = -p(x)\, y_a(x)$$

$$\Rightarrow \quad y_a(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{y_a'(x)}{y_a(x)} = \frac{d}{dx} \ln|y_a(x)| = -p(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad y_a(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \ln|y_a(x)| = -\int_{x_0}^{x} dt\, p(t) + \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_a(x) = 0 \quad \text{oder} \quad |y_a(x)| = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t) + \text{const}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_a(x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right)$$

Integrationskonstante $:= \pm \exp(\text{const.})$; enthält auch die Möglichkeit $y_a(x) = 0$!

(iii) Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung: (y_s)

In der Praxis ist es häufig einfach, eine Lösung zu erraten. Im Prinzip gibt es aber auch eine systematische Methode dafür, durch „Variation der Konstanten".

D.h., nehme Ansatz $y_s(x) = C(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right)$

$$\Rightarrow \quad y_s'(x) = C'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right) - p(x)\, C(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_s'(x) + p(x)\, y_s(x) = C'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right).$$

Die inhomogene Gleichung: $C'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right) = -q(x)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dC(x)}{dx} = -q(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right)$$

$$C(x) = -\int_{x_0}^{x} ds\, q(s) \exp\left(\int_{x_0}^{s} dt\, p(t)\right).$$

Fazit: Die allgemeine Lösung ist $y(x) = y_a(x) + y_s(x)$. Mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ wird $C \to y_0$, und die Lösung kann als

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right) \left[y_0 - \int_{x_0}^{x} ds\, q(s) \exp\left(\int_{x_0}^{s} dt\, p(t)\right) \right]$$

ausgedrückt werden.

Spezielle nichtlineare Differenzialgleichungen erster Ordnung, die auch lösbar sind

* **Separierbare DG:** $\frac{dy}{dx} = g(y)\,f(x)$.

Wir lassen die Notation uns geleiten: $\frac{dy}{g(y)} = dx\,f(x) \Rightarrow \int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\tilde{y}}{g(\tilde{y})} = \int_{x_0}^{x} d\tilde{x}\,f(\tilde{x})$.

Das Ergebnis kann durch Ableitung nach x überprüft werden (vgl. Seite 26): $\frac{d}{dx}\{..=..\} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{g(y)} = f(x)$ OK!

Beispiel: $y' = -\frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \left[-\frac{1}{y}\right]_{y_0}^{y(x)} = \left[\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x} \Rightarrow \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}$.

Jacob Bernoulli 1654-1705

* **DG der Bernoulli-Form:** $\frac{dy}{dx} = p(x)\,y + q(x)\,y^\alpha$, $\alpha \neq 0,1$

(Ursprünglich: $x \to t$, $y \to v$, $\alpha \to n$, $p \to -|p|$, $q \to -|q|$: $\dot{v} = -|p|\,v - |q|\,v^n$. „schnelle Reibung" „langsame Reibung")

Führe eine neue abhängige Variable ein: $z(x) := (y(x))^{1-\alpha}$; $y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Es gilt: $y'(x) = \frac{1}{1-\alpha}(z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\,z'(x) = \frac{1}{1-\alpha}(z(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,z'(x)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\,z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,z' = p\,z^{\frac{1}{1-\alpha}} + q\,z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \Big|\times (1-\alpha)\,z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

„multipliziere beide Seiten durch"

$$z' = (1-\alpha)\,p\,z + (1-\alpha)\,q$$

Diese ist eine lineare DG, und kann wie auf Seite 29 gelöst werden.

* **Exaktes Differenzial:** $\frac{dy}{dx} = -\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$, wobei $p(x,y)$ als $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ und $q(x,y)$ als $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ erkennbar sind.

Seite 14 (implizite Differenziation) $\Rightarrow F(x,y) = \text{const.}$!

Auch automatisch durch die Notation:

$$dy \cdot q(x,y) = -\,dx \cdot p(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = dF = 0 \Rightarrow F = \text{Const}.$$

Beispiel: $y' = -\frac{y}{x}$; $F = xy$; $y(x) = \frac{c}{x}$.

* **DG vom homogenen Typ:** $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (d.h. invariant in $y \to cy$, $x \to cx$).

Führe eine neue unabhängige Variable ein: $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

$$\Rightarrow y(x) = x\,z(x), \quad \frac{dy}{dx} = z(x) + x\,z'(x)$$

$$\Rightarrow x z' + z = f(z)$$

$$\Rightarrow z' = \frac{f(z) - z}{x} \qquad \text{separierbar!}$$

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\tilde{z}}{f(\tilde{z}) - \tilde{z}} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}}$$

Beispiel: $y' = -\frac{y}{x}$; $f(z) = -z$; $-\frac{1}{2}\left[\ln z\right]_{z_0}^{z} = \left[\ln x\right]_{x_0}^{x}$;

$z = \frac{c}{x^2}$; $y = \frac{c}{x}$.