2.9 Gewöhnliche Differenzialgleichungen [Lang & Pucker 6.1]

Auf Seite 19 hatten wir schon eine „Differenzialgleichung": die (unbekannte) Stammfunktion $F(x)$ und der (bekannte) Integrand $f(x)$ erfüllen $F'(x) = f(x)\ \forall x$.
Jetzt definieren wir Differenzialgleichungen viel allgemeiner.
: DG

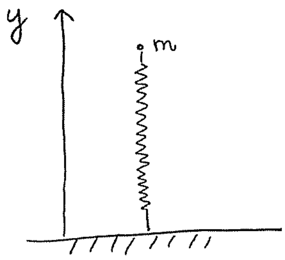
Seite 14: eine Funktion $y(x)$ kann „implizit" durch die Gleichung $G(y,x) = 0$ definiert werden. Die Koordinate x wird auch die „unabhängige Variable" genannt, die Lösung $y(x)$ die „abhängige Variable".

Verallgemeinerung: die Gleichung $G(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x) = 0$ definiert eine gewöhnliche Differenzialgleichung n-ter Ordnung.

Beispiele:

* In der Gleichung $F'(x) = f(x)$ spielt F die Rolle von y; die neue Schreibweise wäre $G(y', y, x) := y' - f(x) = 0$.

* In der klassischen Mechanik spielt die Zeitkoordinate t die Rolle der unabhängigen Variablen; die Ortskoordinate die der abhängigen Variablen. Die bekannte Newtonsche Bewegungsgleichung ist eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung.



$$\underbrace{m\frac{d^2y}{dt^2}}_{\text{Beschleunigung}} = \underbrace{-\gamma\frac{dy}{dt}}_{\text{Reibungskraft}} \underbrace{-ky}_{\text{Federkraft}} \underbrace{-mg}_{\text{Schwerkraft}}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + \frac{\gamma}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y + g = 0.$$

Begriffe:

* gewöhnliche DG: eine unabhängige Variable

↔ partielle DG: mehrere Variablen, z.B. $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y) = 0$.

* lineare DG: Abhängigkeit von y linear, z.B.

$$\underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{d}{dt} + \frac{k}{m}\right)}_{\text{„Differenzialoperator"}} y = -g,$$

d.h., $L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L y_1 + \alpha_2 L y_2$.

↔ nichtlineare DG: $\ddot{y} + y\dot{y} + y^3 = 0$.

* allgemeine Lösung: enthält unbekannte Integrationskonstanten, wie ein unbestimmtes Integral; normalerweise gilt: Zahl der Konstanten = Ordnung der DG.

↔ spezielle Lösung: keine Unbekannten; wie ein bestimmtes Integral.

* Anfangsbedingungen: brauche so viele wie es Integrationskonstanten gibt, um eine eindeutige Lösung zu wählen. Normalerweise: bestimme bei x_0 die Werte von $\underbrace{y, y', \ldots, y^{(n-1)}}_{n \text{ Stück}}$. Dann folgt $y^{(n)}$ von der DG und $y^{(n+1)}, \ldots,$ von Ableitungen der DG; die Lösung kann also eindeutig als Taylor-Reihe,

$$y(x) = \exp\left((x-x_0)\frac{d}{dx}\right) y(x_0),$$

geschrieben werden.

↔ Randbedingungen: kenne nicht $y(x_0)$ und $y'(x_0)$ sondern $y(x_{min})$ und $y(x_{max})$; muß $y'(x_0)$ so aussuchen, dass $y(x_{max})$ erreicht wird.

* Definitionsbereich: $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ so dass DG für $y^{(n)}$ gelöst werden kann.

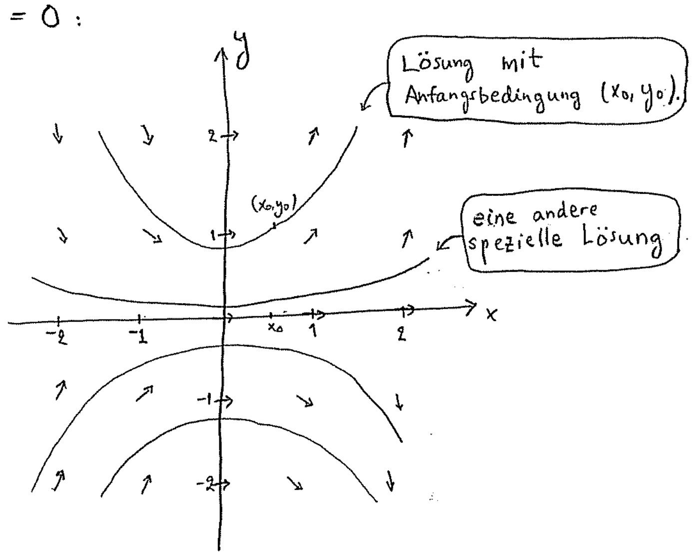
Skizzen für den Fall $n=1$, d.h. $G(y', y, x) = 0$:

$$G(y', y, x) := y' - yx,$$

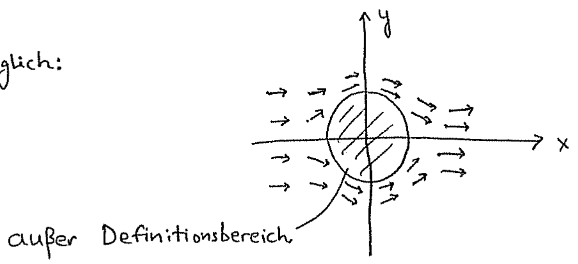
d.h. $y' = yx$.

Skizziere y' in (x,y)-Ebene als Tangentensteigung.

(Allgemeine Lösung: $y(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Integrationskonstante}}}{C} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.)



Vielleicht auch möglich:



——— ∘ ——— ∘ ———