(iii) Partialbruchzerlegung.

Sei der Integrand der Form $\frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei P und Q Polynome sind. Falls $\text{Grad}(P) \geq \text{Grad}(Q)$ ist, kann ein Teil von $P(x)$ „wegdividiert" werden, so dass ein Integrand mit $\text{Grad}(P) < \text{Grad}(Q)$ übrig bleibt (Beispiel folgt).

$$\Rightarrow \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\underbrace{(x-a)(x-b)^n \ldots}_{\text{reelle Nullstellen}} \; \underbrace{(x^2+px+q)(x^2+rx+s)^m \ldots}_{\text{keine reellen Nullstellen}^\dagger}}$$

Die Prozedur:

* $m > 1$ oder $n > 1 \Rightarrow$ Seite 26

* andernfalls: $\frac{P(x)}{(x-a)\ldots(x^2+px+q)\ldots} = \frac{A}{x-a} + \ldots + \frac{Bx+C}{x^2+px+q} + \ldots$

* $\frac{A}{x-a} = A \frac{d}{dx} \ln|x-a|$

* $$\frac{Bx+C}{x^2+px+q} = \frac{B}{2} \cdot \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \cdot \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}$$

$$= \frac{B}{2} \frac{d}{dx} \ln|x^2+px+q| + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \frac{1}{\underbrace{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}_{\text{unbedingt positiv falls keine Nullstellen.}}} \frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)$$

Beispiele:

* $$\int^x dy \frac{1}{y^2-a^2} = \int^x dy \frac{1}{(y-a)(y+a)} = \int^x dy \left(\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y+a}\right) \frac{1}{2a}$$
$$= \frac{1}{2a}\Big(\ln|x-a| - \ln|x+a|\Big) = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$$

* $$\int^x dy \frac{y}{y^2-a^2} = \int^x dy \frac{y}{(y-a)(y+a)} = \int^x dy \left(\frac{1}{y-a} + \frac{1}{y+a}\right) \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\ln|x-a| + \ln|x+a|\Big) = \frac{1}{2} \ln|x^2-a^2|.$$

* $$\int^x dy \frac{y^2}{y^2-a^2} = \int^x dy \frac{y^2-a^2+a^2}{y^2-a^2} = x + \frac{a}{2} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$$

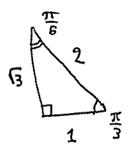
* $$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = ?$$ $\qquad q - \frac{p^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow$ keine reellen Nullstellen.

Schreibe $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$
$= \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2 + 1\right]$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2} \qquad \Big| \quad t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\tfrac{1}{2}) \; ; \; x = \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{1}{2} \; ; \; dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$



---

† Falls komplexe Zahlen erlaubt sind, können Nullstellen immer gefunden werden, und alles wird einfacher!

(iv) Ableitung nach Parameter

Seite 20: $\frac{d}{dx}\int_a^x dy\, f(y) = f(x)$; $\frac{d}{dx}\int_x^b dy\, f(y) = -f(x)$.

Sei jetzt $I(a(x), b(x), x) := \int_{a(x)}^{b(x)} dy\, f(y,x)$.

Wie bei impliziter Differenziation (Seite 14):

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\partial I}{\partial a}\frac{da}{dx} + \frac{\partial I}{\partial b}\frac{db}{dx} + \frac{\partial I}{\partial x}$$
$$= -a'(x)\, f(a(x),x) + b'(x)\, f(b(x),x) + \int_{a(x)}^{b(x)} dy\, \frac{\partial f(y,x)}{\partial x} .$$

Falls a und b unabhängig von x sind, gibt nur der letzte Term einen Beitrag.

Beispiele:

*† $$\int^x \frac{dy}{(y-a)^n} \overset{n>1}{=} \frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial a}\int^x \frac{dy}{(y-a)^{n-1}} = \dots = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\int^x \frac{dy}{y-a}$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\ln|x-a| = \frac{1}{(n-1)!}(-1)\frac{(n-2)!}{(x-a)^{n-1}} = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

* $$\int^x dy\, \frac{By+C}{(y^2+py+q)^n} = \frac{1}{1-n}\frac{\partial}{\partial q}\int^x dy\, \frac{By+C}{(y^2+py+q)^{n-1}} = \dots = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial q^{n-1}}\int^x dy\, \frac{By+C}{y^2+py+q}$$

* $$I_n = \int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n}\int_0^\infty dx\, e^{-ax} \overset{\text{Seite 24}}{=} (-1)^n \frac{d^n}{da^n}\cdot\frac{1}{a}$$
$$= \frac{n!}{a^{n+1}} .$$

* $$\int_0^\infty dx\, \frac{\sin x}{x} = ?$$

Sei $F(a) := \int_0^\infty dx\, e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$

$$\Rightarrow \quad F'(a) = -\int_0^\infty dx\, e^{-ax}\sin x \underset{\substack{u=e^{-ax}\\ v=\cos x}}{=} \left[e^{-ax}\cos x\right]_0^\infty + a\int_0^\infty dx\, e^{-ax}\cos x$$
$$\underset{\substack{u=e^{-ax}\\ v=\sin x}}{=} \left[e^{-ax}\cos x\right]_0^\infty + \left[a e^{-ax}\sin x\right]_0^\infty + a^2\int_0^\infty dx\, e^{-ax}\sin x$$

$$\Rightarrow \quad F'(a) = -1 - a^2 F'(a) \quad \Rightarrow \quad F'(a) = -\frac{1}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \quad F(a) = -\arctan(a) + \text{const} .$$

Außerdem gilt: $0 = \lim_{a\to\infty} F(a) = -\lim_{a\to\infty}\arctan(a) + \text{const}$
$$= -\frac{\pi}{2} + \text{const} \quad \Rightarrow \quad \text{const} = \frac{\pi}{2} .$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\infty dx\, \frac{\sin x}{x} = F(0) = \underbrace{-\arctan(0)}_{\text{Seite 17: } 0} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} .$$

---

† Natürlich könnte man hier den Integrand auch direkt als $\frac{1}{(y-a)^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{d}{dy}\frac{1}{(y-a)^{n-1}}$ erkennen.