2.8 Integrationsmethoden [Lang & Pucker 4.2-3 (5.2-3)]

Es gibt einige (im Folgenden vier) „Tricks", die das Erraten der Stammfunktion erleichtern können.

(i) Variablentransformation bzw. Substitution der Variablen

Sei φ eine differenzierbare $[\varphi' \exists]$ und invertierbare $[\varphi^{-1} \exists]$ Funktion.
Es gilt:

$$I = \int_a^b dx\ f(x) = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} dt\ \varphi'(t)\, f(\varphi(t)) \quad \left(= \int_{t_a}^{t_b} dt\ \frac{dx}{dt}\, f(x)\,. \right)$$

Beweis: Sei $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, und $\tilde{F}(t) := F(\varphi(t))$.

Dann ist
$$\frac{d\tilde{F}(t)}{dt} \underset{\text{Kettenregel}}{=} F'(\varphi(t))\,\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,,$$

und folglich
$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} dt\ \varphi'(t)\, f(\varphi(t)) = \left[\tilde{F}(t)\right]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = F(b) - F(a)\,. \quad \square$$

Eine kürzere Schreibweise:
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \frac{dx}{dt}\, dt = \varphi'(t)\, dt \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{min} = a \Leftrightarrow t_{min} = \varphi^{-1}(a) \\ x_{max} = b \Leftrightarrow t_{max} = \varphi^{-1}(b)\,. \end{cases}$$

(In vielen Fällen ist die Form $t = \varphi^{-1}(x)$ zuerst erkennbar!)

Beispiele:

* $$\int_a^b dx\ (1+cx)^4 \underset{\substack{t = cx \\ x = \frac{t}{c} \\ dx = \frac{dt}{c}}}{=} \int_{ca}^{cb} \frac{dt}{c}\,(1+t)^4 \underset{\substack{s = 1+t \\ t = s-1 \\ dt = ds}}{=} \frac{1}{c}\int_{1+ca}^{1+cb} ds\ s^4 = \frac{1}{5c}\left[(1+cb)^5 - (1+ca)^5\right].$$

„Skalierung" „Verschiebung"

* $$\int_a^b \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \int_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}} \frac{2t\,dt}{t} = 2\,[t]_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}} = 2\left[\sqrt{1+b} - \sqrt{1+a}\right].$$

$t = \sqrt{1+y} \Leftrightarrow$ „$t = \varphi^{-1}(y)$"
$y = t^2 - 1 \Leftrightarrow$ „$y = \varphi(t)$"
$dy = 2t\,dt \Leftrightarrow$ „$dy = \varphi'(t)\,dt$"

* Bei trigonometrischen Integranden hilft häufig:

$$t = \tan\frac{x}{2}\ ; \quad x = 2\arctan(t)\ ; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Seite 10

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ; \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\Rightarrow \int^x \frac{dy}{\sin y} \underset{t = \tan\frac{y}{2}}{=} \int^{\tan(\frac{x}{2})} \underbrace{\frac{2\,dt}{1+t^2}}_{dy}\cdot\underbrace{\frac{1+t^2}{2t}}_{\frac{1}{\sin y}} = \int^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{dt}{t} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

(ii) Partielle Integration

Sei der Integrand ein Produkt zweier Funktionen, und sei eine davon direkt als Ableitung erkennbar : $f(x) = u(x)\,v'(x)$. Dann gilt:

$$\int^x dy\; u(y)\,v'(y) = u(x)\,v(x) - \int^x dy\; u'(y)\,v(y).$$

Beweis: $$\int^x dy\,\big[u(y)\,v'(y) + u'(y)\,v(y)\big] \underset{\text{Produktregel}}{=} \int^x dy\,\frac{d}{dy}\big[u(y)\,v(y)\big] = u(x)\,v(x) \qquad \square .$$

$\int^x dy\, f(y) = F(x)$ wobei $F'(x) = f(x)$,

d.h. $\int^x dy\, F'(y) = \int^x dy\,\frac{dF}{dy} = F(x)$.

In der Praxis: man muß lernen, angemessene u, v zu identifizieren.

Beispiele:

$*$ $$\int^x dy\,\ln y \underset{u=\ln y,\ v=y}{=} x\ln x - \int^x dy\,\underbrace{y}_{v}\,\underbrace{\frac{d\ln y}{dy}}_{u'} = x\ln x - \int^x dy = x\ln x - x .$$

$*$ $$\int^x dy\,\sqrt{1+y^2} \underset{u=\sqrt{1+y^2},\ v=y}{=} x\sqrt{1+x^2} - \int^x dy\; y\,\frac{d}{dy}\sqrt{1+y^2} = x\sqrt{1+x^2} - \int^x dy\,\frac{y^2+1-1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$= x\sqrt{1+x^2} + \int^x dy\,\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \int^x dy\,\sqrt{1+y^2}$$

Aufgabe 5.1(a)

$$\Rightarrow \int^x dy\,\sqrt{1+y^2} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right).$$

$*$ $$\int_a^b dt\,\sin^2(t) \underset{u=\sin(t),\ v=-\cos(t)}{=} \big[-\sin(t)\cos(t)\big]_a^b + \int_a^b dt\,\underbrace{\cos(t)}_{-v}\,\underbrace{\cos(t)}_{u'}$$

$$\underset{\cos^2+\sin^2=1}{=} \big[-\sin(t)\cos(t)\big]_a^b + \big[t\big]_a^b - \int_a^b dt\,\sin^2(t)$$

$$\Rightarrow \int_a^b dt\,\sin^2(t) = \frac{1}{2}\big[t - \sin(t)\cos(t)\big]_a^b .$$

$*$ $$I_n := \int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax} \underset{u=x^n,\ v=-\frac{e^{-ax}}{a}}{=} -\frac{1}{a}\big[x^n e^{-ax}\big]_0^\infty + \frac{1}{a}\int_0^\infty dx\, n x^{n-1} e^{-ax}$$

Für $a>0$ ist $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-ax} = 0$ (vgl. Seite 13).
Für $n>0$ ist $\lim_{x\to 0} x^n e^{-ax} = 0$.

$$\Rightarrow I_n = \frac{n}{a}\, I_{n-1} .$$

Außerdem gilt: $$I_0 = \int_0^\infty dx\, e^{-ax} = -\frac{1}{a}\big[e^{-ax}\big]_0^\infty = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n}{a}\, I_{n-1} = \frac{n(n-1)}{a^2}\, I_{n-2} \underset{\text{iteriere}}{=} \frac{n!}{a^n}\, I_0 = \frac{n!}{a^{n+1}} .$$

—— ∘ ——