2.7 Weitere Begriffe der Integralrechnung [Lang & Pucker 4.1.2 (5.1.2)]

Praxis: Für das praktische Erraten unbestimmter Integrale kann die Tabelle auf Seite 10 benutzt werden, aber jetzt in die umgekehrte Richtung!

$\int^x dy\, 0 = \text{const.}$	$\int^x dy \cosh y = \sinh x$	$\int^x dy \cos y = \sin x$
$\int^x dy\, e^y = e^x$	$\int^x dy \sinh y = \cosh x$	$\int^x dy \sin y = -\cos x$
$\int^x \frac{dy}{y} = \ln\lvert x\rvert$	$\int^x dy \frac{1}{\cosh^2 y} = \tanh x$	$\int^x dy \frac{1}{\cos^2 y} = \tan x$
$\int^x dy\, y^\mu = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1}$	$\int^x dy \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} = \operatorname{arsinh} x$	$\int^x dy \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin x$
$\int^x dy\, f'(y) e^{f(y)} = e^{f(x)}$	$\int^x dy \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} = \operatorname{arcosh} x$	$—\text{"}— = -\arccos x$
$\int^x dy \frac{f'(y)}{f(y)} = \ln\lvert f(x)\rvert$	$\int^x dy \frac{1}{1-y^2} = \operatorname{artanh} x$	$\int^x dy \frac{1}{1+y^2} = \arctan x$

Wegen der unbestimmten Integrationskonstanten gibt es in manchen Fällen mehrere mögliche Schreibweisen; zum Beispiel,

$$x = \sin(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \Rightarrow y = \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x .$$

nicht sichtbar im $\int^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

Es gilt auch:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{artanh} \frac{1}{x} = \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1-x^2} ,$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \int^x dy \frac{1}{1-y^2} = \operatorname{artanh} x = \operatorname{artanh} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| .$$

Bemerkung: Ableitungen von elementaren Funktionen sind immer elementare Funktionen. Deren Integrale sind aber <u>nicht</u> immer elementare Funktionen; falls ein solches Integral häufig vorkommt, gibt man es einen Namen und erkennt es nachher als „spezielle Funktion". Zum Beispiel:

$$\mathrm{Li}_2(x) := -\int_0^x \frac{dy}{y} \ln(1-y) , \quad x < 1 \qquad \text{„Dilogarithmus"}$$

$$E_1(x) := \int_x^\infty \frac{dy}{y} e^{-y} , \quad x > 0 \qquad \text{„exponentielles Integral"}$$

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty dy\, y^{x-1} e^{-y} , \quad x > 0 \qquad \text{„Gammafunktion"}$$

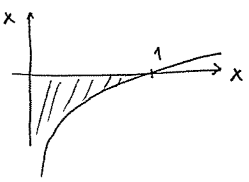
$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy\, e^{-y^2} , \quad x > 0 \qquad \text{„Error funktion"}$$

Erweiterung 1: uneigentliches Integral

Falls der Integrand $f(x)$ bei $x \to a$ bzw. $x \to b$ divergiert, oder a bzw. b nach $\pm\infty$ geschickt wird, oder beides, wird das Integral als Grenzwert definiert, falls dieser existiert. Falls ja, wird die Funktion $f(x)$ auf $]a,b[$ integrierbar genannt. Durch Grenzwert definierte Integrale sind „uneigentliche Integrale".

Beispiele:

* $$\int_0^1 dx \; \ln x$$



$$:= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 dx \; \ln x$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 dx \frac{d}{dx}\left[x\ln x - x\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[x \ln x - x\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\underbrace{1\ln 1}_{0} - 1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon\right] = -1 .$$

Seite 13: $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$

* $$\int_0^\infty dx \; e^{-x}$$

$$:= \lim_{\delta \to \infty} \int_0^\delta dx \; e^{-x}$$

$$= \lim_{\delta \to \infty} \int_0^\delta dx \frac{d}{dx}\left[-e^{-x}\right] = \lim_{\delta\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^\delta = \lim_{\delta\to\infty}\left[-e^{-\delta} + 1\right] = 1 .$$

Erweiterung 2: bestimmtes Integral in der Mathematik

Für uns war $f(x)$ stetig (und $F(x)$ differenzierbar), aber man kann den Begriff des bestimmten Integrals so verallgemeinern, dass Stetigkeit nicht mehr benötigt wird.

Damit verbundene Begriffe: Lebesgue-Integral, Riemann-Integral, Maßtheorie, das Integrationsmaß, ...

Das Integral könnte so aussehen: $$I = \int_\Omega d\mu \; f$$

Integrand
Integrationsmaß
Integrationsbereich

Allgemeine Eigenschaften:

$$\int_\Omega d\mu \,(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\Omega d\mu \, f + \beta \int_\Omega d\mu \, g$$

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} d\mu = \int_{\Omega_1} d\mu + \int_{\Omega_2} d\mu \quad \text{falls} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset .$$

Häufig auch: $\int_\Omega d\mu = 1$.

Beispiele:

* $\Omega = [a,b]$; $d\mu := \dfrac{dx}{b-a}$
* $\Omega =]-\infty, \infty[$; $d\mu :\stackrel{!}{=} dx \, \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$