2.6 Hauptsätze der Integralrechnung [Lang & Pucker 4.1.1 (5.1.1)]

Integration ist die „Umkehroperation" zu Differenziation, d.h. (grob)
integriere (differenziere (f(x))) = differenziere (integriere (f(x))) = f(x). Genauer:

Definition: Sei $f(x)$ stetig $\forall x \in \,]a,b[$. Die Stammfunktion bzw. das unbestimmte Integral von $f(x)$ ist eine stetige und differenzierbare Funktion $F(x)$, die die „Differenzialgleichung"

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in \,]a,b[$$

erfüllt.

Notation:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{„} dF = dx\, f(x) \text{"}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \int dF = \int dx\, f(x) \,.$$

„unbestimmtes Integral"

Später wird besser sein: $F(x) = \int^{x} dy\, f(y)$.

„bestimmtes Integral"

Hier wird $f(y)$ der „Integrand" genannt.

Bemerkung: Die Stammfunktion ist nicht eindeutig:

$$F'(x) = f(x) \quad \& \quad G'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[F(x) - G(x)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) - G(x) = \text{const.}$$

„Integrationskonstante"

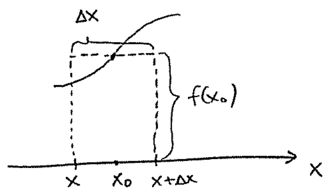
Wichtig: Man darf $F(x)$ erraten!
Man muß aber Ergebnis durch Ableitung $\frac{dF}{dx}$ überprüfen!

Interpretation: Laut Mittelwertsatz gilt

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x_0) = f(x_0) \,, \quad x < x_0 < x + \Delta x \,.$$

D.h. $F(x+\Delta x) = F(x) + f(x_0)\,\Delta x$.

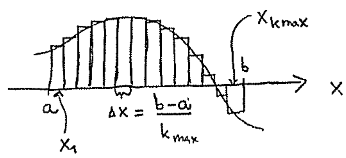
Hier ist $f(x_0)\,\Delta x$ = „Flächenelement",
und somit $F(x)$ = „Fläche unter f bis x".



Definition: Das bestimmte Integral von $f(x)$ zwischen a und b wird als

$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{k_{max}} f(x_k)\,\Delta x$$

definiert. (falls Limes existiert, unabhängig von Wahl von x_k.)



I + D $\Rightarrow$ **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:**

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) \,.$$

bestimmtes Integral

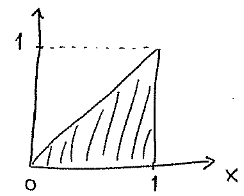
unbestimmtes Integral

Beispiel:

$f(x) = x$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \text{const.}$

$\int_0^1 dx\, x = F(1) - F(0) =: \left[\frac{x^2}{2} + \text{const}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$



Sätze:

* $\int_a^b dx\, (cf(x)) = c\int_a^b dx\, f(x)$ [wie auf Seite 9: $(cF)' = cF'$]

$\int_a^b dx\,[f(x)+g(x)] = \int_a^b dx\, f(x) + \int_a^b dx\, g(x)$ [wie auf Seite 9: $(F+G)' = F'+G'$]

* $\int_a^b dx\, f(x) = -\int_b^a dx\, f(x)$ $[F(b)-F(a) = -(F(a)-F(b))]$

$\int_a^a dx\, f(x) = 0$ $[F(a)-F(a) = 0]$

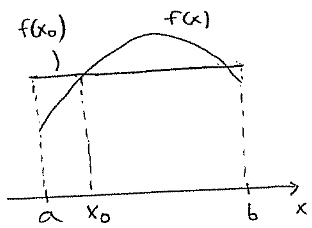
$\int_a^b dx\, f(x) + \int_b^c dx\, f(x) = \int_a^c dx\, f(x)$ $[F(b)-F(a)+F(c)-F(b) = F(c)-F(a)]$

Gilt auch für $a < c < b$ usw!

* Sei $m \leq f(x) \leq M \quad \forall\, x \in [a,b]$.
Dann gilt
$$m(b-a) \leq \int_a^b dx\, f(x) \leq M(b-a)$$

[Aus der Definition:
$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{k_{max}} f(x_k)\Delta x \geq \lim_{\Delta x \to 0}\{m * \underbrace{k_{max} * \Delta x}_{b-a}\}$$]

* Mittelwertsatz der Integralrechnung:
Sei $f(x)$ stetig $\forall x \in\,]a,b[$. Dann $\exists\, x_0 \in\,]a,b[$ so dass
$$\int_a^b dx\, f(x) = f(x_0)(b-a)$$
gilt.



[Benutze Mittelwertsatz der Differenzialrechnung auf Stammfunktion:
$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) = F'(x_0)(b-a) = f(x_0)(b-a) \quad \square.$$]

* $\frac{d}{dx}\int_a^x dy\, f(y) = f(x)$ $\left[\frac{d}{dx}(F(x)-F(a)) = F'(x) = f(x)\right]$

$\frac{d}{dx}\int_x^b dy\, f(y) = -f(x)$ $\left[\frac{d}{dx}(F(b)-F(x)) = -F'(x) = -f(x)\right]$

——— ∘ ——— ∘ ———