2.5 Allgemeines über Reihen [Lang & Pucker 1.3]

Satz: Falls eine Funktion durch eine Reihe definiert ist, d.h. $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, dann stellt diese Reihe auch die Taylor-Reihe um den Punkt $x=a$ dar.

Beweis: Die Koeffizienten der Taylor-Reihe sind $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Jetzt also:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots &&\Rightarrow f(a) = c_0 \\
f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots &&\Rightarrow f^{(1)}(a) = c_1 \\
f^{(2)}(x) &= 2c_2 + 6c_3(x-a) + \dots &&\Rightarrow f^{(2)}(a) = 2!\,c_2 \\
f^{(3)}(x) &= 6c_3 + \dots &&\Rightarrow f^{(3)}(a) = 3!\,c_3
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \Rightarrow \square .$$

Folgerung: Es spielt keine Rolle wie die Reihendarstellung konstruiert wird.

Einige wichtige Reihen:

* e^x, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$: Seite 4.
* „geometrische Reihe" $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, $|x| < 1$.
* $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $-1 \le x < 1$.
* $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!} x^3 + \dots$, $|x| < 1$. „binomische Reihe"

Beispiel: Wie kann man die Reihendarstellungen von $\tan(x)$ und $\arctan(x)$ konstruieren?

* zuerst $\arctan(x)$ (leichter!)

Seite 10: $\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$

geometrische Reihe

$$\Rightarrow \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} .$$

„integriere"

* $\tan(x)$ direkt aus der Definition:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}$$

geometrische Reihe

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots\right]^2 + \dots\right)$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \dots\right)$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2} + \left[\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right] x^4 + \dots\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \dots$$

Jakob Bernoulli 1655–1705

„Bernoulli-Zahl"

Ein anderer Weg: Aufgabe 4.4.

(Die allgemeine Antwort: $\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k} (2^{2k}-1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}$, $|x| < \frac{\pi}{2}$)

Zur Konvergenz von Reihen

Reihen sind sehr wichtig in vielen Bereichen der Physik und Mathematik; leider ist ihre Konvergenz ein leidiges Thema, und es gibt keine elegante allgemeine Theorie dazu.

In der Praxis funktioniert aber meistens das „Quotientenkriterium".

Sei $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k$

und $\varrho_k(x) := \left| \frac{c_{k+1}(x-x_0)}{c_k} \right| = \left| \frac{c_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{c_k (x-x_0)^k} \right|$.

Die Reihe konvergiert, falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert. Sei $\varrho(x) = \lim_{k\to\infty} \varrho_k(x)$ [falls existiert].

Dann gilt:
$$\begin{cases} \varrho(x) < 1 \Rightarrow \text{die Reihe ist „absolut konvergent".} \\ \varrho(x) = 1 \Rightarrow \text{keine Aussage möglich} \\ \qquad\qquad\text{(kann konvergieren falls z.B. alternierend).} \\ \varrho(x) > 1 \Rightarrow \text{die Reihe divergiert.} \end{cases}$$

Die Werte von x mit $\varrho(x) < 1$ bilden den Konvergenzbereich.

Beweis für Konvergenz:

Falls $\varrho(x) < 1$ dann $\exists\, k_0$ so dass $\varrho_k(x) < z < 1 \ \forall k > k_0$.

Dann gilt: $f_n(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0} c_k (x-x_0)^k}_{\text{endlich}} + \underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{n} c_k (x-x_0)^k}$

$$\left| \sum_{k=k_0+1}^{n} c_k (x-x_0)^k \right| \leq \sum_{k=k_0+1}^{n} \left| c_k (x-x_0)^k \right|$$

Hier ist $\left| \frac{c_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{c_k (x-x_0)^k} \right| = \varrho_k(x) < z$.

D.h., $\sum_{k=k_0+1}^{n} |c_k (x-x_0)^k| < |c_{k_0} (x-x_0)^{k_0}| \left(z + z^2 + z^3 + \ldots \right)$.

Hier steht aber die geometrische Reihe, und diese konvergiert für $z<1$.

□

Mit absolut konvergenten Reihen kann man in der Regel genau so umgehen wie mit Polynomen, d.h. Reihe umordnen, zwei Reihen dividieren / multiplizieren, Ordnung von Ableitung und Summierung vertauschen $\left(\frac{d}{dx} \sum_k c_k (x-x_0)^k = \sum_k c_k\, k\, (x-x_0)^{k-1} \right)$, Ordnung von Integration und Summierung vertauschen, usw.

—— o —— o ——