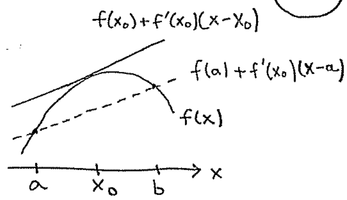
2.4 Taylor - Entwicklung [Lang & Pucker 1.2]

[Brook Taylor 1685 - 1731]



Mittelwertsatz (Seite 11): $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$

$$\Leftrightarrow \quad f(b) = \underbrace{f(a) + f'(x_0)(b-a)}$$

„Vorhersage" für f(b) mittels Informationen bei x<b. Allerdings ist $f(a)+f'(x_0)(x-a)$ eine exakte Darstellung nur für $x=a$ und $x=b$. Kann man die Übereinstimmung mit f(x) verbessern?

Taylor - Formel: Sei $f^{(n)}$ ($n \in \{0,1,2,\dots\}$) stetig $\forall x \in [a,b]$ und differenzierbar (d.h. $f^{(n+1)} \exists$) $\forall x \in]a,b[$.

Dann gilt

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{„Taylor-Polynom"}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{„Lagrangesches Restglied"}} ,$$

1736 - 1813

wobei $a < x_0 < x \leq b$ gilt.

(Wenn wir x_0 so wählen, dass f(b) richtig reproduziert wird, dann ist die Beschreibung nicht exakt bei $a<x<b$, aber wahrscheinlich genauer als die oben skizzierte Gerade.)

Beweis:

(anschaulicher: Aufgabe 4.1)

$$F(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k = f(t) + f'(t)(x-t) + \tfrac{1}{2} f''(t)(x-t)^2 + \dots$$

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}}_{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$F(x) = f(x)$$

$$F(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$G(t) := (x-a)^{n+1} - (x-t)^{n+1}$$

$$G'(t) = (n+1)(x-t)^n$$

$$G(x) = (x-a)^{n+1}$$

$$G(a) = 0$$

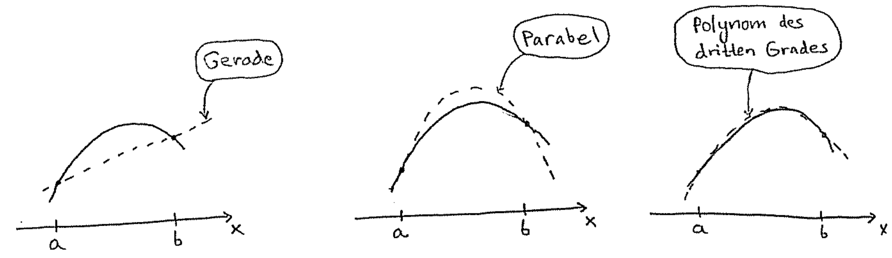
Erweiterter Mittelwertsatz (Seite 12): $\dfrac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \dfrac{F'(x_0)}{G'(x_0)}$

$$\Rightarrow \quad F(x) = F(a) + \frac{F'(x_0)}{G'(x_0)}\,[G(x) - G(a)]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!} \cdot \cancel{(x-x_0)^n}}_{F'(x_0)} \cdot \frac{\overbrace{(x-a)^{n+1}}^{G(x)-G(a)}}{\underbrace{(n+1)\cancel{(x-x_0)^n}}_{G'(x_0)}}$$

□

Anschaulich:
(Wähle x_0 so dass $f(b)$ richtig reproduziert wird.)



$n=0$: $f(a) + f'(x_0)(x-a)$

$n=1$: $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(y_0)}{2}(x-a)^2$

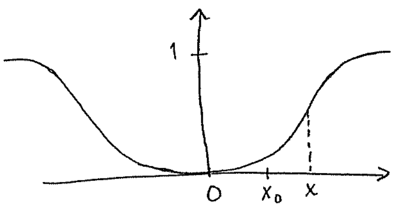
$n=2$: $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x-a)^3$.

Unter bestimmten Bedingungen — falls f <u>∞-mal differenzierbar</u> ist, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ für $a < x \leq b$ <u>konvergiert</u> (vgl. Seite 18), und das Restglied $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ für $a < x \leq b$ im Limes $n \to \infty$ <u>verschwindet</u>, können wir $f(x)$, für $\forall x \in [a,b]$, als eine <u>Taylor-Reihe</u> darstellen.

Notation: $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} \frac{d^k f(a)}{dx^k} \text{ „=" } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k}{k!} f(a)$$
$$\text{„=" } \exp\left[(x-a)\frac{d}{dx}\right] f(a) .$$

(Für $a=0$ wird Taylor-Reihe auch MacLaurin-Reihe genannt.)
1698-1746

Im Kap. 2.5 kommen Beispiele wo alles schön funktioniert, aber zuerst ein berühmtes Gegenbeispiel: Taylor-Reihe von $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ um $x=0$?



$$f(0) = \exp(-\infty) = 0;$$
$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right);$$
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{y\to\infty} 2y^3 \exp(-y^2) = \lim_{y\to\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0 .$$
wie auf Seite 13 (l'Hospital)

Und auch: $f^{(n)}(0) = 0$. $\forall\, n$.

D.h. die Taylor-Reihe <u>konvergiert</u>, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k = 0$.

Aber das Ergebnis ist <u>nicht</u> richtig, weil <u>R_n bei $n\to\infty$ nicht kleiner wird</u>:

$$f^{(2)} = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right); \quad f^{(3)} = \left(\cdots + \frac{24}{x^5}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right); \quad f^{(n)} = \left(\cdots + \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}x^{n+1} = \left(\cdots + \frac{(n+2)!}{x_0^{n+3}}\right)\exp\left(-\frac{1}{x_0^2}\right) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$= \left(\cdots + \underbrace{(n+2)\Big(\underbrace{\frac{x}{x_0}}_{>1}\Big)^{n+1}}_{\text{wächst mit } n}\right)\frac{1}{x_0^2}\exp\left(-\frac{1}{x_0^2}\right)$$

wächst mit n.