2.3 Weitere Begriffe der Differenzialrechnung [Lang & Pucker 3.2-3] (4.2-3)

* Falls eine Funktion, $y(x)$, als Lösung der Gleichung $F(x,y) = \text{const}$ definiert wird, nennt man sie eine „implizite Funktion". Die explizite Lösung $y(x)$ ist eine „explizite Funktion".

$\Rightarrow$ Wie nimmt man $\frac{dy}{dx}$ ohne die explizite Funktion zu kennen?

* Ableitung nach Parameter: die „Koordinate", z.B. x, wird festgehalten, aber ein Parameter, z.B. eine Eigenschaft des Messgeräts, wird geändert:

$$f(x) = ax^2 \qquad \frac{df(x)}{dx} = 2ax \quad \text{(normale Ableitung)}$$

$$\frac{df}{da} = x^2 \quad \text{(Ableitung nach Parameter)}$$

* Partielle Ableitung:

wie Ableitung nach Parameter aber „symmetrischer": beide Variablen werden als „Koordinaten" betrachtet.

Notation:
$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial x} := \left.\frac{df}{dx}\right|_{a = \text{const.}}$$

$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} := \left.\frac{df}{da}\right|_{x = \text{const.}}$$

Beispiel: $f(x) = ax^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2ax, \ \frac{\partial f}{\partial a} = x^2$.

* Implizite Differenziation:

$$\Delta F = F(x_0+\Delta x, y(x_0+\Delta x)) - F(x_0, y(x_0)) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \underbrace{\frac{F(x_0+\Delta x, y(x_0+\Delta x)) - F(x_0, y(x_0+\Delta x))}{\Delta x}}_{\to \frac{\partial F}{\partial x}} + \underbrace{\frac{F(x_0, y(x_0+\Delta x)) - F(x_0, y(x_0))}{\Delta x}}_{\frac{\partial F}{\partial y} \times \frac{dy}{dx}}$$

Im Limes $\Delta x \to 0$:

[Kettenregel bzgl. y!]

D.h. $0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \times \frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}} \qquad \text{falls } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Zweites Beispiel:
$\frac{1}{2}mv^2 = c$
$v = \sqrt{\frac{2c}{m}}$
$\frac{dv}{dm} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2c}}{m^{3/2}} = -\frac{1}{2}\frac{v}{m}$.
Aber auch: $F(v,m) = \frac{1}{2}mv^2$
$-\frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = -\frac{\frac{1}{2}v^2}{mv} = -\frac{1}{2}\frac{v}{m}$.

Beispiel: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow y'(x) = -\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{\frac{2}{3}y^{-1/3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$.

* Höhere Ableitungen:

$$(f')' =: f'' =: f^{(2)} \ ; \quad f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)' \ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a} \ ; \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial a^n} \ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a} \stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial x}$$