2.2 Hauptsätze der Differenzialrechnung [Lang & Pucker 3.1 (4.1) ; Analysis-Vorlesungen]

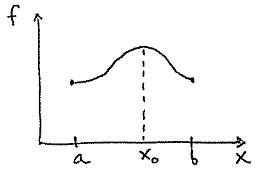
Differenzierbare Funktionen besitzen viele interessante Eigenschaften, wodurch deren Verhalten „nicht-lokal" beschränkt werden kann.

Satz von Rolle

[Michel Rolle 1652-1719]

Sei f stetig für $x \in [a,b]$, differenzierbar für $x \in]a,b[$, und erfülle außerdem die Gleichung $f(a) = f(b)$. Dann existiert $x_0 \in]a,b[$ so dass $f'(x_0) = 0$ gilt.

Idee des Beweises :



(i) $f(x) = \text{const} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \ \forall x_0$

(ii) $f(x)$ ist nicht konstant. Dann existiert mindestens ein Maximum oder Minimum [Satz von Weierstraß], sei dies bei x_0. Hier gilt $f'(x_0) = 0$!

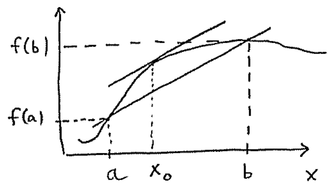
Warum? Beweis durch Widerspruch: Sei $f'(x_0) \neq 0$.

Dann gilt $f(x_0+\varepsilon) = f(x_0) + \underbrace{\underbrace{f'(x_0)\varepsilon}_{\neq 0}}_{\gtrless 0,\ \text{abhängig vom Vorzeichen von } \varepsilon .\ \lightning} + \underbrace{\varepsilon O(\varepsilon)}_{\text{klein}}$.

Mittelwertsatz

Sei f stetig für $x \in [a,b]$ und differenzierbar für $x \in]a,b[$

$\Rightarrow \ \exists \ x_0 \in]a,b[$ so dass $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$ gilt,



bzw. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Steigung}}}{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tangentensteigung} \\ \text{(bzw. „Sekantensteigung")}}}{f'(x_0)}$.

Beweis:

Benutze Rolle auf $\varphi(x) := f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$:

$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

$\Rightarrow \ \exists \ x_0$ mit $\varphi'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ □.

Bemerkung:

- Aus Definition der Ableitung, mit $\begin{cases} b-a =: \Delta x \\ a =: x_0 \end{cases}$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bekannt!}}}{f'(a)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unbekannt!}}}{O(b-a)}$

- Aus Mittelwertsatz: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unbekannt!}}}{f'(x_0)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{keine Korrektur!}}}{0}$.

Folge 1: f sei differenzierbar und monoton wachsend auf $]a,b[$

$\Leftrightarrow \quad f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$.

Beweis: mit Hilfe des Mittelwertsatzes (monoton fallend entsprechend).

Folge 2: Es gebe eine „Unsicherheit" in der Lagebestimmung des Messgeräts, d.h. in der Koordinate; sei diese Δx. Dieses führt zu einem „systematischen Fehler" im Messwert: $\Delta f = f'(x_0)\,\Delta x$.

Erweiterter Mittelwertsatz

[Augustin Louis Cauchy 1789-1857]

Seien f und g zwei Funktionen wie oben (stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf $]a,b[$). Dann existiert mindestens ein $x_0 \in]a,b[$ so dass

$$f'(x_0)\left[g(b)-g(a)\right] = g'(x_0)\left[f(b)-f(a)\right]$$

gilt. Ist weiterhin $g'(x) \neq 0$ auf $]a,b[$, so ist insbesondere $g'(x_0) \neq 0$ und $g(b) \neq g(a)$, und wir erhalten

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} .$$

Beweis: Benutze Rolle auf $\xi(x) := g(x)\left[f(b)-f(a)\right] - f(x)\left[g(b)-g(a)\right]$:

$$\begin{aligned} \xi(b) &= g(b)\left[\cancel{f(b)}-f(a)\right] - f(b)\left[\cancel{g(b)}-g(a)\right] \\ &= -g(b)f(a) + g(a)f(b) \\ \xi(a) &= g(a)\left[f(b)-\cancel{f(a)}\right] - f(a)\left[g(b)-\cancel{g(a)}\right] \\ &= g(a)f(b) - g(b)f(a) = \xi(b) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \xi'(x_0) = g'(x_0)\left[f(b)-f(a)\right] - f'(x_0)\left[g(b)-g(a)\right] = 0 \Rightarrow \square .$$

Regel von l'Hospital

[Marquis de l'Hospital 1661-1704]

Seien $f(a)=g(a)=0$, $g'(a) \neq 0$, und f und g differenzierbar in einer Umgebung von a. Dann gilt:

$$„\frac{0}{0}" = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Beweis: Laut erweitertem Mittelwertsatz mit $f(a)=g(a)=0$ gilt:

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} , \quad \text{mit } a<x_0<b .$$

Schicke jetzt $b \to a^+$, wobei auch $x_0 \to a^+$ automatisch genommen wird.

Anwendungen

* Die Regel von l'Hospital erleichtert in vielen Fällen die Bestimmung eines Grenzwerts.

Beispiele $\left[\text{„}\frac{0}{0}\text{"} \right]$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \qquad \text{(vgl. Seite 7)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 .$$

* Auch Grenzwerte der Form „$\frac{\infty}{\infty}$" können genommen werden, weil sie als „$\frac{0}{0}$" interpretiert werden können:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{l'Hospital}}}}{=} \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Beispiel:

$$\underset{\text{„}0\times\infty\text{"}}{\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x} = \underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{l'Hospital}}}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^n}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{n>0}}}{=} 0$$

„Logarithmus wächst bei $x=0$ langsamer als jede Potenz."

* Funktioniert auch mit $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{l'Hospital \& Kettenregel}}}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0 .$$

„Exponentialfunktion wächst bei $x\to\infty$ schneller als jede Potenz."

* Falls $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ immer noch der Form „$\frac{0}{0}$" bzw. „$\frac{\infty}{\infty}$" ist, kann die Regel von l'Hospital erneut benutzt werden.

* Und zuletzt das Wichtigste:

Sätze von Rolle und Weierstraß sowie Folge 1 von Mittelwertsatz ermöglichen die Minimierung, Maximierung und Kurvendiskussion von Funktionen, vgl. Aufgaben 3.2 und 3.3.