

2. Analysis in einer Dimension

neue Auflage

2.1 Grenzwert, Stetigkeit, Differenzierbarkeit [Lang & Pucker 3.1 (4.1)]

Die in der Physik auftauchenden Funktionen sind normalerweise "glatt", d.h. ihre Werte können sich nicht beliebig wild verändern, auf jeden Fall nicht bei kurzen Abständen. Diese Tatsache stellt uns neue Methoden zur Verfügung.

Definition: $f(x)$ hat bei $x=x_0$ den Grenzwert f_0

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : |f(x) - f_0| < \epsilon \text{ falls } |x - x_0| < \delta_\epsilon .$

Bezeichnung: " $f(x) \rightarrow f_0$ für $x \rightarrow x_0$ ", oder " $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f_0$ ".

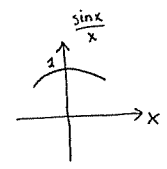
Der Grenzwert kann auch von links oder rechts genommen werden, z.B. " $f(x) \rightarrow f_0$ für $x \rightarrow x_0^+$ " oder " $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f_0$ " bedeutet, dass nur $0 < x - x_0 < \delta_\epsilon$ betrachtet werden.

Für unendlich: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : |f(x) - f_0| < \epsilon \text{ falls } x > \delta_\epsilon .$

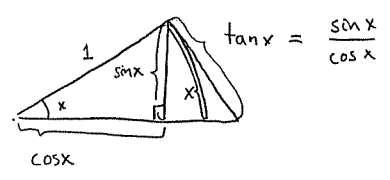
Beispiel: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ " $\frac{0}{0}$ "

* intuitiv, aus Definition (Seite 6):

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$
 $\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \dots$
 $\rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0^+$



* geometrisch:



$\Rightarrow \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$
 $\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$
 $\Rightarrow 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \frac{x^2}{4}$

D.h. $|1 - \frac{\sin x}{x}| < \epsilon$ für $x < \sqrt{\frac{2\epsilon}{1}}$

Sätze (ohne Beweis):

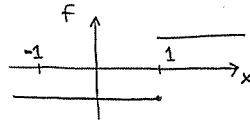
- * $\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- * $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- * $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) g(x)] = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)] \cdot [\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)]$
- * $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ falls $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

Definitionen:

- * $f(x)$ ist stetig bei $x = x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- * $f(x)$ ist stetig im Intervall $]x_a, x_b[\iff f(x)$ stetig $\forall x \in]x_a, x_b[$.

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & x > 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{1}{2}; \quad f(1) = -\frac{1}{2}$$

\Rightarrow stetig von links bei $x=1$ aber nicht von rechts.

Also ganz einfach: eine Funktion ist stetig, falls sie skizziert werden kann, ohne den Stift zu heben!

Sätze (ohne Beweis):

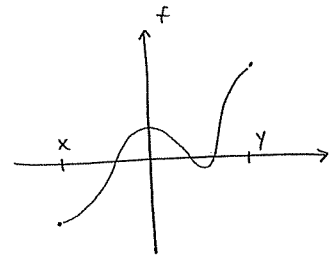
- * f, g stetig $\Rightarrow cf, f+g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ stetig [wie oben]
- * f, g stetig \Rightarrow Komposition [vgl. Seite 3] $g \circ f$ stetig.
- * f stetig \Rightarrow Umkehrfunktion [vgl. Seite 3] f^{-1} stetig.

Zwischenwertsatz (ohne Beweis):

Ist f stetig im Intervall I und sind $x, y \in I$, dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ an.

Wichtiger Spezialfall:

Gilt $f(x) < 0$ und $f(y) > 0$, so hat f zwischen x und y mindestens eine Nullstelle:



Definition: $f(x)$ hat bei $x=x_0$ die Ableitung f'

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f' \quad \text{"0/0"}$$

Die Funktion f ist dann differenzierbar bei x_0 .

Bezeichnungen: $f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0)$

„Differenzquotient“ „Differenzialquotient“ bzw. „Leibniz-Notation“

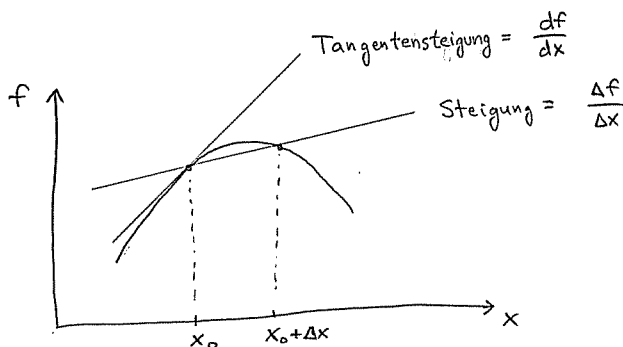
In der Physik auch: $\frac{df}{dt} = \dot{f}$
 ↙ Zeitkoordinate

Konsequenz:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \Delta x \cdot \mathcal{O}(\Delta x), \quad \text{mit } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta x) = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ ist stetig bei } x_0!$$

Graphisch:



Beispiel: $f(x) = ax^2$

$$\Delta f = a(x_0 + \Delta x)^2 - ax_0^2 = 2ax_0 \Delta x + a(\Delta x)^2,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2ax_0 + a \Delta x,$$

$$\frac{df}{dx} = 2ax_0.$$

Die Ableitung kann immer durch die Definition bestimmt werden, aber in der Praxis arbeitet man meistens mit einmal bewiesenen Regeln.

- I.
- * $(cf)' = cf'$ (weil $\Delta(cf) = c\Delta f$ gilt)
 - * $(f+g)' = f'+g'$ „Summenregel“
(weil $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$ gilt)
 - * $(fg)' = f'g + g'f$ „Produktregel“
(weil $\Delta(fg) = f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) = [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]g(x_0 + \Delta x) + [g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)]f(x_0)$ gilt, und g stetig ist).
 - * $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ „Quotientenregel“
(weil $\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{g(x_0)f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0)g(x_0 + \Delta x)} = \frac{g(x_0)[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x_0) - g(x_0 + \Delta x)]}{g(x_0)g(x_0 + \Delta x)}$ gilt).

II. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ " Kettenregel "

Beweis: $\frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x}$

$$= \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \times \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Sei $f(x_0) =: y_0$;
 $f(x_0 + \Delta x) =: y_0 + \Delta y$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} \times \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} g'(y_0) f'(x_0)$$

III. $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x=f^{-1}(y)}$ " Ableitung der Umkehrfunktion "

Beweis: benutze Kettenregel auf der linken Seite von $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Mit diesen Regeln sowie den ursprünglichen Definitionen kann die folgende nützliche Tabelle konstruiert werden:

$\frac{dc}{dx} = 0$	$\frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x$	$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$
$\frac{de^x}{dx} = e^x$	$\frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x$	$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$
$\frac{d \ln x }{dx} = \frac{1}{x}$	$\frac{d \tanh x}{dx} = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$\frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{dx^p}{dx} = p x^{p-1}$	$\frac{d \operatorname{arsinh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{d \operatorname{arcsin} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{de^{f(x)}}{dx} = f'(x) e^{f(x)}$	$\frac{d \operatorname{arcosh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d \operatorname{arccos} x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d \ln f(x) }{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\frac{d \operatorname{artanh} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$	$\frac{d \operatorname{arctan} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

