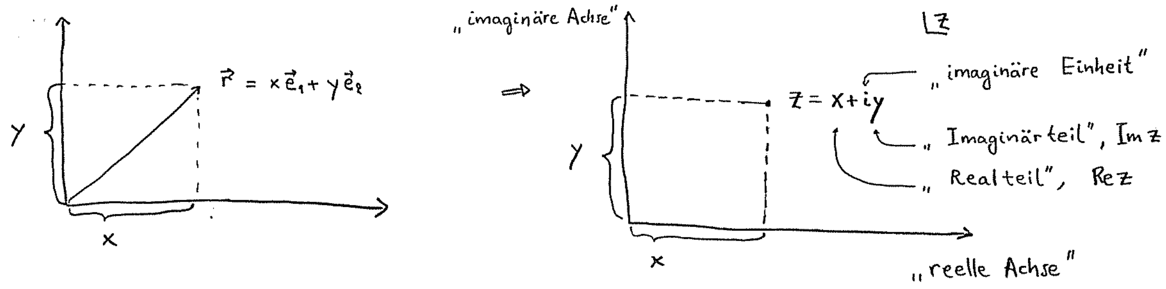
1.3 Komplexe Zahlen und Funktionen [Lang & Pucker 2.1-2]

$\mathbb{R}^2$ mit spezieller zusätzlicher Struktur $\Rightarrow$ die komplexe Ebene $\mathbb{C}$.



Summen von komplexen Zahlen sind wie bei reellen Vektoren:

$$z_1 + z_2 := x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \,.$$

Produkte werden aber auch definiert, mittels der zusätzlichen Eigenschaft $\boxed{i^2 := -1}$:

Auch: $z_1 \cdot z_2$; $z_1 * z_2$

$$z_1 \times z_2 := (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \,.$$

(Es existieren auch „neutrale Elemente" ($z + 0 = z$; $z \times 1 = z$) und „inverse Elemente" ($z + (-z) = 0$; $z \times z^{-1} = 1$) bzgl. beider „Verknüpfungen"; alles dies macht die Menge der komplexen Zahlen zu einem „Körper".)

Subtraktion: $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$

Division: $\frac{z_1}{z_2} := z_1 \times z_2^{-1}$; Was ist z_2^{-1} ?

Sei $z_2 = x_2 + iy_2$.

Die „komplex-konjugierte" davon:

Oft: $\bar{z} := z^*$

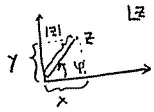
$$z_2^* := x_2 - iy_2$$

Es gilt: $z_2 z_2^* = x_2^2 + y_2^2 + i(\overbrace{x_2 y_2 - x_2 y_2}^{0}) \in \mathbb{R}$.

Also: $\boxed{z_2^{-1} = \frac{z_2^*}{z_2 z_2^*}} = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Weitere Definitionen:

* Betrag bzw. Modul von z: $|z| = \mathrm{mod}\, z := \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

  Graphisch: 

* Argument von z: $\arg z := \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

* Polare Form von z: $z = x + iy = |z| \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

$$= |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi) \,.$$

Weil Addition und Multiplikation zur Verfügung stehen, können wir die beiden kombinieren und komplexe Polynome definieren:

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n .$$

Die Koeffizienten könnten reell $(a_k \in \mathbb{R})$ oder auch komplex $(a_k \in \mathbb{C})$ sein.

Komposition $[\,(g \circ f)(z) := g(f(z))\,]$, Umkehrfunktion $[\, f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathbb{1} \,]$ sowie unendliche Reihen $[\, P_n(z)$ mit $n \to \infty \,]$ führen zu weiteren Funktionen.

Besonders wichtig: die Exponentialfunktion:

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad ; \quad e := \exp(1) \text{ wie früher.}$$

[Umkehrfunktion: $\ln(z)$; allgemeine Potenz: $a^z := \exp(z \ln a)$; $e^z = \exp(z)$.]

Euler-Formel: (1707–1783)

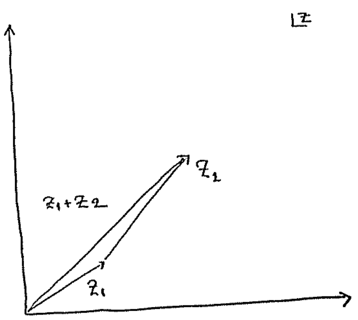
$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{1}{2!}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots + i\left[\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots\right]$$

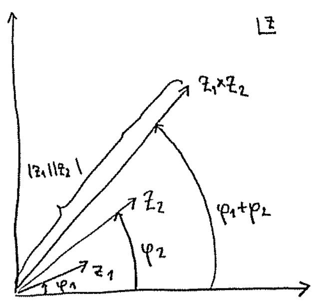
$$\stackrel{!}{=} \cos\varphi + i \sin\varphi .$$

Zum Beispiel: $\underline{\underline{e^{i\pi}}} = \cos\pi + i \sin\pi = \underline{\underline{-1}}$.

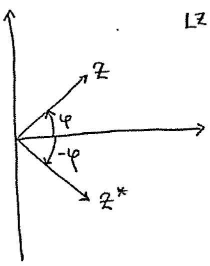
Graphische Darstellungen:



Addition: wie bei normalen Vektoren in $\mathbb{R}^2$



Multiplikation: polare Form kann jetzt als $z = |z|\, e^{i\varphi}$ ausgedrückt werden, und es folgt $z_1 z_2 = |z_1||z_2|\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.



Komplexe Konjugation: $z^* = x - iy$, d.h. Imaginärteil wird um die reelle Achse reflektiert $(\varphi \to -\varphi)$.