1.2 Elementare Funktionen [Lang & Pucker, Anhang B]

Laut Kap. 1.1 führen physikalische Betrachtungen uns zum Studium von Funktionen.

Vorerst: <u>reelle[†] Funktionen</u>, $f: \underset{\text{Raum- bzw. Zeitkoordinate}}{\mathbb{R}} \to \underset{\text{Messwert}}{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto f(x)$. (oder $t \mapsto x(t)$).

* <u>Polynom</u>: $f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ (Grad m)

$+\ldots$: m-fache Summe; x^m: Potenz: m-fache Multiplikation

Aber auch: $f(x) = \sum_{n=0}^{m} b_n (x-x_0)^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

* <u>Komposition</u> bzw. <u>Hintereinanderausführung</u> zweier Funktionen:

$(g \circ f)(x) := g(f(x))$ „g nach f"

Zum Beispiel: $f(x) = x - x_0$, $g(x) = b_n x^n$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = b_n (x-x_0)^n$; $(f \circ g)(x) = b_n x^n - x_0$.

* <u>Umkehrfunktion</u>: falls die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig als $x = g(y)$ gelöst werden kann, nennen wir g die Umkehrfunktion zu f.

Bezeichnung üblicherweise: f^{-1} [nicht verwechseln mit $\frac{1}{f}$!]

Bemerkung: $y = f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) \quad \forall y$

$\Rightarrow f \circ f^{-1} = \mathbb{1} :=$ <u>Identität</u>.

Aber auch:

$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) \quad \forall x$

$\Rightarrow f^{-1} \circ f = \mathbb{1}$.

<u>Beispiele</u>:

(i) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto 2x^2$ hat Umkehrfunktion:

$y = 2x^2 \qquad \frac{y}{2} = x^2 \qquad x = \sqrt{\frac{y}{2}}$

$\Rightarrow f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}}$

[ob wir die Variable x oder y nennen, spielt keine Rolle.

(ii) $f(x) = x^m \Rightarrow \exists f^{-1}(x) =: \sqrt[m]{x} \overset{!}{=} x^{1/m}$ für $x > 0$,

wobei die <u>Definition</u> einer allgemeinen Potenz (sogar $x^{\mu}, \mu \in \mathbb{R}$) auf nächster Seite folgt.

† Struktur von $\mathbb{R}$:

$\exists$ zwei „Verknüpfungen":
$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$
$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \times b \in \mathbb{R}$

$\exists$ „Nullelement":
$a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$\exists$ „Einselement":
$a \times 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$\exists$ „Inversen":
$\forall a \in \mathbb{R} \ \exists -a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$.
$\forall a \neq 0 \ \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ mit $a \times \frac{1}{a} = 1$.

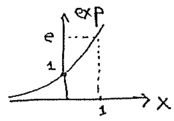
Andere Operationen:
$a - b := a + (-b)$,
$\frac{a}{b} := a \times (\frac{1}{b})$.

Weitere elementare Funktionen werden durch <u>unendliche Reihen</u> definiert (mehr dazu später).
Insbesondere: $f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$ mit $a_n := \frac{1}{n!} := \frac{1}{n(n-1)\cdots 1}$ und $m \to \infty$ ergibt $(0! := 1)$
die <u>Exponentialfunktion</u>:

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad ; \quad e := \exp(1) \approx 2{,}718\ldots \; ;$$

Diese Darstellung konvergiert, erstaunlicherweise, für $\forall\, x$; z.B.

$$\exp(-10) = 1 - 10 + \tfrac{1}{2} \times 100 - \tfrac{1}{6} \times 1000 + \tfrac{1}{24} \times 10\,000 - \ldots$$
$$= 1 - 10 + 50 - 166{,}7 + 416{,}7 - \ldots$$
$$\approx 0{,}0000453999 \, .$$



Die Umkehrfunktion von $\exp(x)$ wird mit $\ln(x)$ bezeichnet:

$$\exp(\ln(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \; ; \quad \ln(\exp(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \; ; \quad \underline{\ln e = 1} \, .$$

Reihendarstellung: $\ln(x) = \ln(1 + x - 1) = \ln(1 - [1-x]) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1-x)^n$; konvergiert für $0 < x \leq 2$.

<u>Weitere elementare Funktionen:</u>

* Potenz $a^x := \exp(x \cdot \ln a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n$, für $a \in \mathbb{R}_+$.

Die Umkehrfunktion ist $\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a}$.

Es gilt: $e^x = \exp(x)$, denn $\ln e = 1$.

[Beweis: $y = a^x > 0$
$\Rightarrow \ln y = \ln(\exp(x \ln a)) = x \ln a$
$\Rightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$]

* Sinus Hyberbolicus $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Cosinus Hyberbolicus $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$.

Tangens Hyberbolicus $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh}(x)$, $\operatorname{arcosh}(x)$, $\operatorname{artanh}(x)$ (nur für bestimmte x)
(„Area Sinus Hyberb.")

* Sinus $\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Cosinus $\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

Tangens $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Umkehrfunktionen $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$ (nur für bestimmte x)
(„Arcus Sinus")

—— o —— o ——