Übungen zu Mechanik II	**Blatt Nr. 12**

Aufgabe 1: Betrachtet wird ein System mit konstanter Kraft, z.B. Schwerkraft; das Potential sei $U(x) = -Fx$. Zum Zeitpunkt 0 befinde sich ein Teilchen beim Ort x, zum Zeitpunkt t beim y.

(a) Bestimmen Sie die klassische Bahnkurve x_{cl} sowie die entsprechende Wirkung $S[x_{\text{cl}}]$.

(b) Bestimmen Sie den quantenmechanischen Propagator $K(y, t; x, 0)$.

$$\left[\text{Antwort: } K = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(y-x)^2}{2t} + \frac{F(y+x)t}{2} - \frac{F^2t^3}{24m}\right]\right\}.\right]$$

Aufgabe 2: In der Vorlesung wurde das folgende Ergebnis für den Propagator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators gefunden:

$$K(y,t;x,0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega t)}}\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin(\omega t)}\left[(x^2+y^2)\cos(\omega t) - 2xy\right]\right\}.$$

(a) Verwenden Sie $K(y, t; x, 0)$, um $\mathrm{Sp}(e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}})$ zu bestimmen.
[Hinweis: Berechnen Sie die Spur in der $|x\rangle$-Basis.] [Antwort: $\mathrm{Sp}(e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}) = \frac{1}{2i\sin(\omega t/2)}$.]

(b) Extrahieren Sie aus der Antwort der Aufgabe (a) die Energie-Eigenwerte des Systems. [Hinweis: Drücken Sie diesmal die Spur in der Energie-Eigenbasis aus.]

In der Prüfung sind keine Hilfsmittel erlaubt, aber die folgende Tabelle wird auf dem Prüfungsblatt gegeben:

$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_a}-\frac{\partial L}{\partial q_a}$	$H=\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot q_a}\dot q_a - L$	$L=\frac{1}{2}\sum_{a,b} f_{ab}(q)\dot q_a \dot q_b - U$
$J=(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot q_a}\dot q_a - L)X - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot q_a}Q_a$	$\dot q_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}=\{q_a,H\}$	$=\frac{1}{2}\sum_a(\dot Q_a^2-\omega_a^2Q_a^2)+O(Q^3)$
$L'=L+\sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha$	$\dot p_a=-\frac{\partial H}{\partial q_a}=\{p_a,H\}$	$I=\int \mathrm{d}x\ \exp(-\frac{1}{2}x^TAx-b^Tx)$
$\Theta_{ij}=\int \mathrm{d}^3\vec r'\,\rho(\vec r')(\delta_{ij}\|\vec r'\|^2-x_i'x_j')$	$\{q_a,p_b\}=\delta_{ab}$	$=\frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}}\exp(\frac{1}{2}b^TA^{-1}b)$
$L=-mc^2\sqrt{1-\vec v^2/c^2}$	$\mathrm{Vol}(T)=\mathrm{Vol}(T')$	$K(y,t_2;x,t_1)=\int_{x(t_1)=x}^{x(t_2)=y}\mathscr{D}x(t)\ \exp(\frac{i}{\hbar}S)$

Exercises to Mechanics II	**Sheet 12**

Exercise 1: We consider a system with a constant force, for instance gravitational force; the potential reads $U(x) = -Fx$. At time 0 a particle is at position x, at time t at position y.

(a) Determine the classical trajectory x_{cl} as well as the corresponding action $S[x_{\text{cl}}]$.

(b) Determine the quantum-mechanical propagator $K(y, t; x, 0)$.

$$\left[\text{Answer: } K = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(y-x)^2}{2t} + \frac{F(y+x)t}{2} - \frac{F^2t^3}{24m}\right]\right\}.\right]$$

Exercise 2: In the lecture we found the following result for the propagator of a one-dimensional harmonic oscillator:

$$K(y, t; x, 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega t)}} \exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin(\omega t)}\Big[(x^2+y^2)\cos(\omega t) - 2xy\Big]\right\}.$$

(a) Make use of $K(y, t; x, 0)$, in order to compute the trace $\mathrm{Tr}(e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}})$.
[Hint: compute the trace in the $|x\rangle$ basis.]
[Answer: $\mathrm{Tr}(e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}) = \frac{1}{2i\sin(\omega t/2)}$.]

(b) Extract from the answer of point (a) the energy eigenvalues of the system.
[Hint: express this time the trace in the energy eigenbasis.]