Übungen zu Mechanik II	**Blatt Nr. 11**

Aufgabe 1: In der Variationsrechnung sowie in der Behandlung von Pfadintegralen wird die Wirkung häufig in der Form

$$S[x_{\text{cl}} + \delta x] = S[x_{\text{cl}}] + \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \, \frac{\delta S[x_{\text{cl}}]}{\delta x_{\text{cl}}(t)} \, \delta x(t) + O(\delta x)^2$$

geschrieben, wobei die Variation an den Integrationsgrenzen verschwindet, d.h. $\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$. Hier kann die „Funktionalableitung" formal als

$$\frac{\delta S[x_{\text{cl}}]}{\delta x_{\text{cl}}(t)} := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{S[x_{\text{cl}} + \epsilon \delta_t] - S[x_{\text{cl}}]}{\epsilon} \tag{1}$$

definiert werden, wobei δ_t ein Diracsche Deltafunktion um t ist (d.h. $\delta_t(t') = 0$ für $t' \neq t$; $\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \mathrm{d}t' \, \delta_t(t') = 1$). Zeigen Sie, dass für den Fall $S = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \, L$ die Definition (1) die linke Seite der Euler-Lagrange-Gleichung reproduziert:

$$\frac{\delta S[x_{\text{cl}}]}{\delta x_{\text{cl}}(t)} = \frac{\partial L}{\partial x_{\text{cl}}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\text{cl}}} \right) .$$

Aufgabe 2: Bei Pfadintegralen taucht häufig die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_N \, \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} x_i A_{ij} x_j - \sum_{i=1}^{N} b_i x_i \Big\} = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det(A)}} \exp\Big\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} b_i (A^{-1})_{ij} b_j \Big\}$$

auf. Ermitteln Sie eine sorgfältige Begründung.

Aufgabe 3: Das folgende Ergebnis kann für den Propagator eines freien Teilchens (in einer Dimension) gefunden werden:

$$K(y, t; x, 0) := \langle y | e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} | x \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp\Big\{ \frac{im(y-x)^2}{2\hbar t} \Big\} .$$

Verifizieren Sie anhand des expliziten Ausdrucks, dass K die folgenden Eigenschaften hat:

(a) „Anfangsbedingung": $\lim_{t \to 0^+} K(y, t; x, 0) = \delta(y - x)$.

(b) „Bewegungsgleichung": K erfüllt die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung bzgl. t, y.

(c) „Zerlegung": $K(y, t; x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \, K(y, t; z, t_1) K(z, t_1; x, 0)$, $\quad 0 < t_1 < t$.

(d) „Zeitumkehr" bzw. „Inverse":

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \, \tilde{K}(y, 0; z, t_1) K(z, t_1; x, 0) = \delta(y - x) ,$$

wobei $\tilde{K}(y, 0; z, t_1) := K^*(z, t_1; y, 0)$ eine Bewegung „rückwärts in Zeit" beschreibt.

Exercises to Mechanics II	**Sheet 11**

Exercise 1: In variational calculus as well as in the treatment of path integrals, the action is often expressed as

$$S[x_{\mathsf{cl}} + \delta x] = S[x_{\mathsf{cl}}] + \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \, \frac{\delta S[x_{\mathsf{cl}}]}{\delta x_{\mathsf{cl}}(t)} \, \delta x(t) + O(\delta x)^2 \; ,$$

where the variation vanishes at the boundaries, i.e. $\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$. We can now define a "functional derivative" as

$$\frac{\delta S[x_{\mathsf{cl}}]}{\delta x_{\mathsf{cl}}(t)} := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{S[x_{\mathsf{cl}} + \epsilon \delta_t] - S[x_{\mathsf{cl}}]}{\epsilon} \; , \tag{2}$$

where δ_t stands for a Dirac-δ localized at t (i.e. $\delta_t(t') = 0$ for $t' \neq t$; $\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \mathrm{d}t' \, \delta_t(t') = 1$). Show that if $S = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \, L$, then the definition (2) reproduces the left-hand side of the Euler-Lagrange equation,

$$\frac{\delta S[x_{\mathsf{cl}}]}{\delta x_{\mathsf{cl}}(t)} = \frac{\partial L}{\partial x_{\mathsf{cl}}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\mathsf{cl}}} \right) .$$

Exercise 2: In path integrals we are often encountered with the formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_N \, \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} x_i A_{ij} x_j - \sum_{i=1}^{N} b_i x_i \Big\} = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det(A)}} \exp\Big\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} b_i (A^{-1})_{ij} b_j \Big\} \; .$$

Provide a careful derivation.

Exercise 3: The following result can be found for the propagator of a free particle in one dimension:

$$K(y, t; x, 0) := \langle y | e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} | x \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp\Big\{ \frac{im(y-x)^2}{2\hbar t} \Big\} \; .$$

Make use of this formula, in order to verify the following properties of K:

(a) "initial condition": $\lim_{t \to 0^+} K(y, t; x, 0) = \delta(y - x)$.

(b) "equation of motion": K satisfies a Schödinger equation with respect to t, y.

(c) "decomposition": $K(y, t; x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \, K(y, t; z, t_1) K(z, t_1; x, 0) \; , \quad 0 < t_1 < t$.

(d) "time reversal" or "inverse":

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \, \tilde{K}(y, 0; z, t_1) K(z, t_1; x, 0) = \delta(y - x) \; ,$$

where $\tilde{K}(y, 0; z, t_1) \equiv K^*(z, t_1; y, 0)$.