Übungen zu Mechanik II **Blatt Nr. 10**

Aufgabe 1: Ein Massenpunkt in einer Dimension bewege sich im Potential

$$U(x) = a\,x \text{ für } x > 0\,, \qquad U(x) = -b\,x \text{ für } x < 0\,,$$

mit positiven Konstanten a und b.

(a) Skizzieren Sie das Potential und die Phasenraumtrajektorien. Für letztere betrachten Sie vier verschiedene Fälle: $a = b = 1$, $a = 2b = 2$, $a = \infty$ und $b = 1$, $a = 0$ und $b = 1$.

(b) Leiten Sie die Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her. Bestimmen Sie die Periode der Bewegung als Funktion der Energie E.

Aufgabe 2: Betrachtet wird die Hamilton-Funktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators,

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}\,.$$

(a) Ermitteln Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen in der Form $q = q(q_0, p_0, t)$, $p = p(q_0, p_0, t)$, wobei q_0 und p_0 die Werte von q und p am Zeitpunkt $t = 0$ sind.

(b) Verifizieren Sie, dass der Übergang $(q_0, p_0) \to (q, p)$ als eine kanonische Transformation interpretiert werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass die Phasenraumtrajektorie eine Ellipse ist.

(d) Bestimmen Sie das Volumen des Phasenraums für Energien $\leq E$,

$$V(E) := \int_{H(q,p)\leq E} \mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,.$$

Nehmen wir an, dass das Volumen „quantisiert" sei, d.h. $V(E_2) - V(E_1) = nh$, $n \in \mathbb{N}$. Was würde dies für die Quantisierung der Energie implizieren?

Aufgabe 3:

(a) Ein Massenpunkt (Masse m) bewege sich in einem dreidimensionalen Potential $U = \frac{k}{2}(x^2 + 4y^2 + 16z^2)$. Am Zeitpunkt $t = 0$ wird der Massenpunkt losgelassen, mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit. Zeigen Sie, dass die Bewegung periodisch ist, und bestimmen Sie die Periode.

(b) Sei jetzt $U = \frac{k}{2}(x^2 + 2y^2 + 5z^2)$. Bleibt die Bewegung periodisch?

(c) Im Fall (b) sei eine nichtverschwindende Anfangsgeschwindigkeit erlaubt. Kann der Massenpunkt in diesem Fall zum Anfangspunkt zurückkehren? [Sie dürfen sich auf den Fall einer Bewegung in der (x, y)-Ebene beschränken.]

Exercises to Mechanics II	**Sheet 10**

Exercise 1: A point mass moves in one dimension in the potential

$$U(x) = a\,x \text{ for } x > 0\;, \qquad U(x) = -b\,x \text{ for } x < 0\;,$$

with positive constants a and b.

(a) Sketch the potential and the phase space trajectories. For the latter, consider 4 different cases: $a = b = 1$; $a = 2b = 2$; $a = \infty$ and $b = 1$; $a = 0$ and $b = 1$.

(b) Derive the Hamiltonian and the corresponding equations of motion. Determine the period of the periodic motions as a function of the energy E.

Exercise 2: We consider the Hamiltonian of a one-dimensional harmonic oscillator,

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}\;.$$

(a) Present the solution of the equations of motion in the form $q = q(q_0, p_0, t)$, $p = p(q_0, p_0, t)$, where q_0 and p_0 are the values of q and p at time $t = 0$.

(b) Verify that the transition $(q_0, p_0) \to (q, p)$ can be viewed as a canonical transformation.

(c) Show that the phase space trajectory is an ellipse.

(d) Determine the volume of the phase space filled by trajectories with energies $\leq E$,

$$V(E) := \int_{H(q,p)\leq E} \mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\;.$$

Let us assume that the volume is "quantized", i.e. $V(E_2) - V(E_1) = nh$, $n \in \mathbb{N}$. What would this imply for the quantization of the energy?

Exercise 3:

(a) A point particle (mass m) moves in a three-dimensional potential, $U = \frac{k}{2}(x^2 + 4y^2 + 16z^2)$. The particle is set free at time $t = 0$ with a vanishing initial velocity. Show that the motion is periodic, and determine its period.

(b) Let us now take $U = \frac{k}{2}(x^2 + 2y^2 + 5z^2)$. Does the motion remain periodic?

(c) In case (b) we allow for a non-vanishing initial velocity. Can the point mass return back to the starting point in this case? [Hint: you may restrict yourself to motion taking place in the (x, y)-plane.]