Übungen zu Mechanik II	**Blatt Nr. 09**

Aufgabe 1: Betrachtet werden zwei Massenpunkte (m_1, m_2) in kartesischen Koordinaten $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Die Massenpunkte wechselwirken miteinander durch das Potential $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Zeigen Sie, dass $F_i \equiv \vec{e}_i \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, erhaltene Grössen sind: $\{F_i, H\} = 0$.

Aufgabe 2:

(a) Bestimmen Sie die Poisson-Klammern $\{L_i, p_j\}$ der kartesischen Komponenten vom Drehimpuls $\vec{L}$ und Impuls $\vec{p}$ eines Massenpunktes.

(b) Bestimmen Sie die Poisson-Klammern $\{L_i, L_j\}$ der kartesischen Komponenten des Drehimpulses $\vec{L}$. [Antwort: $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$.]

Aufgabe 3: Seien A, B Erhaltungsgrössen, d.h. $\{A, H\} = \{B, H\} = 0$. Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ wiederum eine Erhaltungsgrösse ist. [Hinweis: Jacobi-Identität.]

Aufgabe 4: Zur Erinnerung: Eine Gruppe besteht aus einer Menge G und einer Verknüpfung „$\cdot$“ mit den Eigenschaften: (i) $a, b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G$ (*Abgeschlossenheit*); (ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*Assoziativität*); (iii)$\exists e \in G$ mit $e \cdot a = a \; \forall a$ (*Einselement*); (iv) $\forall a \; \exists a^{-1} \in G$ mit $a^{-1} \cdot a = e$ (*Inverse*). Die symplektische Gruppe Sp($2s$) kann anhand von $(2s) \times (2s)$ Matrizen A dargestellt werden, welche die Eigenschaft

$$A^T J A = J \,, \quad J \equiv \begin{pmatrix} 0_{s\times s} & \mathbb{1}_{s\times s} \\ -\mathbb{1}_{s\times s} & 0_{s\times s} \end{pmatrix} \,,$$

erfüllen.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrizen A tatsächlich eine Gruppe bilden.

(b) Betrachten Sie genauer den Fall $s = 1$. Wieviele unabhängige reelle Zahlen werden gebraucht, um ein allgemeines Gruppenelement von Sp(2) zu parametrisieren? Zum Vergleich: Wieviele gibt es bei der orthogonalen Gruppe O(2)?

Exercises to Mechanics II	**Sheet 9**

Exercise 1: We consider two point masses (m_1, m_2) in cartesian coordinates $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. These bodies interact through the potential $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Show that $F_i \equiv \vec{e}_i \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, are conserved: $\{F_i, H\} = 0$.

Exercise 2:

(a) Determine the Poisson brackets $\{L_i, p_j\}$ between the cartesian components of the angular momentum $\vec{L}$ and the momentum $\vec{p}$ of a point particle.

(b) Determine the Poisson brackets $\{L_i, L_j\}$ of the cartesian components of the angular momentum $\vec{L}$. [Answer: $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$.]

Exercise 3: Let A, B be conserved quantities, i.e. $\{A, H\} = \{B, H\} = 0$. Show that the Poisson bracket $\{A, B\}$ is also conserved. [Hint: Jacobi identity.]

Exercise 4: A reminder: a group consists of a set G and a multiplication "$\cdot$" with the properties (i) $a, b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G$ (*closedness*); (ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*associativity*); (iii)$\exists e \in G$ with $e \cdot a = a\ \forall a$ (*unit element*); (iv) $\forall a\ \exists a^{-1} \in G$ with $a^{-1} \cdot a = e$ (*inverse*). The symplectic group Sp($2s$) can be represented with $(2s) \times (2s)$ matrices A, satisfying the property

$$A^T J A = J \ , \quad J \equiv \begin{pmatrix} 0_{s\times s} & \mathbb{1}_{s\times s} \\ -\mathbb{1}_{s\times s} & 0_{s\times s} \end{pmatrix} .$$

(a) Show that the matrices A indeed form a group.

(b) Inspect more precisely the case $s = 1$. How many independent real coordinates are needed for parametrizing a general element of Sp(2)? For comparison: how many are needed for the orthogonal group O(2)?