| Übungen zu Mechanik II | **Blatt Nr. 08** |
|---|---|

**Aufgabe 1:** Betrachtet wird die Lagrange-Funktion $L = \frac{m}{2}\big(\dot{q} - f(q)\big)^2$, wobei $f(q)$ eine beliebige reelle Funktion ist.

(a) Bestimmen Sie den zu $q$ konjugierten verallgemeinerten Impuls $p$ und die entsprechende Hamilton-Funktion $H(q,p)$. [Antwort: $H = p^2/(2m) + p\,f(q)$.]

(b) Zeigen Sie, dass die ursprüngliche Lagrange-Funktion sich durch eine inverse Legendre-Transformation reproduzieren lässt.

**Aufgabe 2:** Betrachten Sie noch einmal die Systeme von Blatt 3, Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}\left[R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2 + mg\left(\frac{h}{2\pi}\right)\varphi \qquad \text{für 1a ,} \\
L &= \frac{m_1+m_2}{2}\,l_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\,l_2^2\,\dot{\varphi}_2^2 + m_2\,l_1 l_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\
&\quad + (m_1+m_2)\,g\,l_1\cos\varphi_1 + m_2\,g\,l_2\cos\varphi_2 \qquad \text{für 1b, und} \\
L &= \frac{m_1+m_2}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2\,gl\cos\varphi \qquad \text{für 1c .}
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils die kanonischen Impulse und die Hamilton-Funktion als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der kanonischen Impulse. Leiten Sie daraus die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ab. Welche Erhaltungsgrössen gibt es?

**Aufgabe 3:** Ein Massenpunkt (Masse $m$) bewege sich entlang einer Ellipse mit Hauptachsen $a$ und $b$ ($b < a$). Der Massenpunkt sei mit einer Feder (Federkonstante $k$, Ruhelänge $b$) am Zentrum der Ellipse befestigt. Ermitteln Sie die Hamilton-Funktion und die entsprechenden kanonischen Bewegungsgleichungen, indem Sie einen Winkel als Koordinate wählen.

| Exercises to Mechanics II | **Sheet 8** |
|---|---|

**Exercise 1:** We consider the Lagrangian $L = \frac{m}{2}\big(\dot{q} - f(q)\big)^2$, where $f(q)$ is a real function.

(a) Determine the momentum $p$ conjugate to $q$ as well as the corresponding Hamiltonian $H(q,p)$. [Answer: $H = p^2/(2m) + p\, f(q)$.]

(b) Show that the original Lagrangian can be obtained through an inverse Legendre transformation.

**Exercise 2:** Consider once more the systems from Exercise 1 of Sheet 3:

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}\left[R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2 + mg\left(\frac{h}{2\pi}\right)\varphi \qquad \text{for 1a ,}\\
L &= \frac{m_1+m_2}{2}\, l_1^2\, \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\, l_2^2\, \dot{\varphi}_2^2 + m_2\, l_1 l_2\, \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\\
&\quad + (m_1+m_2)\, g\, l_1 \cos\varphi_1 + m_2\, g\, l_2 \cos\varphi_2 \qquad \text{for 1b, and}\\
L &= \frac{m_1+m_2}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\,(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2\, gl\cos\varphi \qquad \text{for 1c .}
\end{aligned}
$$

Determine the canonical momenta, and subsequently the Hamiltonian as a function of the generalized coordinates and momenta. Derive the Hamiltonian equations of motion. Which conserved quantities do you find?

**Exercise 3:** A point particle (mass $m$) is moving along an ellipse with principal axes $a$ and $b$ ($b < a$). The particle is attached to the center of the ellipse with a spring (spring constant $k$, rest length $b$). Determine the Hamiltonian and the corresponding canonical equations of motion, by choosing an angle as a coordinate.