Übungen zu Mechanik II **Blatt Nr. 07**

**Aufgabe 1:** Betrachtet wird die Lagrange-Funktion einer kleinen Schwingung (bzw. eines harmonischen Oszillators), $L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$. Die entsprechende Bewegungsgleichung lautet $\ddot{q} = -\omega^2 q$. Durch eine Punkttransformation wird eine neue verallgemeinerte Koordinate $\bar{q}$ als $q = \sin\bar{q}$ eingeführt.

(a) Ermittlen Sie die Bewegungsgleichung für $\bar{q}$, indem Sie die Punkttransformation in die obige Bewegungsgleichung einsetzen.

(b) Konstruieren Sie die Lagrange-Funktion $\bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ für die Koordinate $\bar{q}$, und verifizieren Sie, dass die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung aus Punkt (a) reproduziert.

**Aufgabe 2:** Bestimmen Sie die Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ so, dass die Grösse

$$S(n_1, n_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \big\{ (1+n_i)\,\mathsf{ln}(1+n_i) - n_i\,\mathsf{ln}\,n_i \big\}$$

extremal wird. Dabei werden die möglichen Werte von $n_i$ durch die Bedingungen

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i n_i = \text{const.}\ , \quad N = \sum_{i=1}^{\infty} n_i = \text{const.}\ , \quad \{\epsilon_i\} = \text{vorgegeben}\ ,$$

eingeschränkt. [Hinweis: Zwei Lagrange-Multiplikatoren werden gebraucht; einer ist proportional zur inversen Temperatur, der andere zum chemischen Potential.]

**Aufgabe 3:** Betrachtet wird ein freier Massenpunkt mit der Lagrange-Funktion $L = m\dot{\vec{r}}^2/2$. Ein nichtinertiales Koordinatensystem $\Sigma'$ (mit Ortsvektor $\vec{r}\,'$) drehe sich um die $z$-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$, so dass die Koordinaten durch

$$\begin{aligned} x &= x'\cos(\omega t) - y'\sin(\omega t)\ , \\ y &= y'\cos(\omega t) + x'\sin(\omega t)\ , \\ z &= z'\ , \end{aligned}$$

miteinander verwandt sind.

(a) Drücken Sie $L$ mit den Komponenten von $\vec{r}\,'$ als verallgemeinerte Koordinaten aus.

(b) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen im $\Sigma'$ her, und zeigen Sie, dass die Coriolis-Kraft und die Zentrifugalkraft als Scheinkräfte auftauchen.

| Exercises to Mechanics II | **Sheet 7** |
|---|---|

**Exercise 1:** We consider the Lagrangian of a small oscillation (i.e. of a harmonic oscillator), $L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$. The corresponding equation of motion is $\ddot{q} = -\omega^2 q$. Through a point transformation we introduce a new generalized coordinate $\bar{q}$ as $q = \sin\bar{q}$.

(a) Determine the equation of motion for $\bar{q}$, by inserting the point transformation into the equation of motion above.

(b) Construct the Lagrangian $\bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ for the coordinate $\bar{q}$, and verify that the corresponding Euler-Lagrange equation yields the same equation of motion as point (a).

**Exercise 2:** Determine that "occupation numbers" $n_1, n_2, n_3, \ldots$ so that the quantity

$$S(n_1, n_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \big\{ (1 + n_i) \ln(1 + n_i) - n_i \ln n_i \big\}$$

gets extremized, under the constraint that the sums

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i n_i = \text{const.} \;, \quad N = \sum_{i=1}^{\infty} n_i = \text{const.} \;, \quad \{\epsilon_i\} = \text{given} \;,$$

are kept fixed. [Hint: Two Lagrange multipliers are needed; one of them is proportional to the inverse temperature, the other to a chemical potential.]

**Exercise 3:** We consider a free point particle with the Lagrangian $L = m\dot{\vec{r}}^{\,2}/2$. A non-inertial coordinate system $\Sigma'$ (with coordinates $\vec{r}\,'$) rotates around the $z$ axis with the angular velocity $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$, so that the coordinates are related through

$$\begin{aligned} x &= x'\cos(\omega t) - y'\sin(\omega t) \;, \\ y &= y'\cos(\omega t) + x'\sin(\omega t) \;, \\ z &= z' \;. \end{aligned}$$

(a) Express $L$ with the components of $\vec{r}\,'$ as generalized coordinates.

(b) Derive the Euler-Lagrange equations in the system $\Sigma'$, and show that this reproduces the Coriolis force and the centrifugal force.