Übungen zu Mechanik II	**Blatt Nr. 06**

Hinweis: Wenn eine Wirkung der Form $S = \int \mathrm{d}^4x \, \mathscr{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$ ist, wobei $\Phi_a(x)$ Felder sind, lauten die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_a} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \right) , \quad \forall x, a \; . \tag{1}$$

Aufgabe 1:

(a) Die Lagrange-Dichte eines reellen Feldes ϕ lautet

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \, \partial_\mu \phi - U(\phi) \; .$$

Ermitteln Sie die entsprechende Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung.

(b) Sei jetzt

$$\mathscr{L} = \psi^* \Big(i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - U(\vec{r}\,) \Big) \psi \; ,$$

wobei ψ und ψ^* zwei unabhängige Felder im Sinne von Gleichung (1) sind. Welche Bewegungsgleichung erfüllt ψ? [Hinweis: Euler-Lagrange bzgl. ψ^*.]

Aufgabe 2: Betrachtet wird eine Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen und einer elektromagnetischen Feld. Im Lagrange-Formalismus kann diese durch die Wirkung

$$S = -\frac{1}{c^2} \int \mathrm{d}^4x \, J_\mu(x) A^\mu(x) \; , \quad x = (ct, \vec{r}\,)$$

beschrieben werden. Hier ist J die 4-Ladungsstromdichte:

$$J(x) = \sum_a q_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a(t))(c, \vec{v}_a(t)) \; .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\partial_\mu J^\mu = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass d^4x und folglich auch S Lorentz-invariant sind.

(c) Eine „Eichtransformation" wird als $A^\mu \to A^{\mu\prime} = A^\mu + \partial^\mu \chi$ definiert, wobei $\chi \in \mathbb{R}$ ein beliebiges Feld ist. Zeigen Sie, dass die physikalischen Eigenschaften von S in einer Eichtransformation unverändert bleiben.

Aufgabe 3: Betrachtet wird die Wirkung

$$S = -\int \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{c^2} J_\mu(x) A^\mu(x) \right\} \; .$$

Die Felder A_μ spielen die Rolle von Φ_a in Gleichung (1). Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen in diesem Fall den Maxwell-Gleichungen entsprechen, d.h.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \frac{4\pi}{c} J^\nu(x) \; .$$

Exercises to Mechanics II	**Sheet 6**

Hint: if an action has the form $S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathscr{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a)$, where the $\Phi_a(x)$ are fields, then the corresponding Euler-Lagrange equations read

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_a} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \right) , \quad \forall x, a \; . \tag{2}$$

Exercise 1:

(a) The Lagrangian density of a real field ϕ is

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\, \partial^\mu \phi\, \partial_\mu \phi - U(\phi) \; .$$

Determine the corresponding Euler-Lagrange equation.

(b) Let now

$$\mathscr{L} = \psi^* \Big(i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - U(\vec{r}) \Big) \psi \; ,$$

where ψ and ψ^* are two independent fields in the sense of equation (1). What is the equation of motion for ψ? [Hint: Euler-Lagrange with respect to ψ^*.]

Exercise 2: We consider the interaction between charged particles and an electromagnetic field. In the Lagrange formalism this is captured by the action

$$S = -\frac{1}{c^2} \int \mathrm{d}^4x\, J_\mu(x) A^\mu(x) \; , \quad x = (ct, \vec{r}) \; .$$

Here J ist the charge 4-current,

$$J(x) = \sum_a q_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a(t))(c, \vec{v}_a(t)) \; .$$

(a) Show that $\partial_\mu J^\mu = 0$.

(b) Show that d^4x and consequently also S are Lorentz invariant.

(c) A "gauge transformation" is defined as $A^\mu \to A^{\mu\prime} = A^\mu + \partial^\mu \chi$, where $\chi \in \mathbb{R}$ is an arbitrary field. Show that the physical properties of S are gauge invariant.

Exercise 3: We consider the action

$$S = -\int \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{c^2} J_\mu(x) A^\mu(x) \right\} .$$

The fields A_μ play the role of Φ_a in equation (2). Show that the Euler-Lagrange equations correspond to the Maxwell equations, i.e.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \frac{4\pi}{c} J^\nu(x) \; .$$