Übungen zu Mechanik II **Blatt Nr. 05**

Aufgabe 1: Ein homogener (voller) Zylinder und eine homogene Vollkugel mit Radius R und Masse M rollen eine schiefe Ebene der Länge l und mit Neigungswinkel φ hinab. Berechnen Sie jeweils das Trägheitsmoment, stellen Sie Lagrange-Funktion und Bewegungsgleichung auf, und bestimmen Sie die Laufzeit. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Laufzeit eines reibungsfrei gleitenden Massenpunktes.

Aufgabe 2: Der Verlauf des elektrischen Potentials eines zweiatomigen Moleküls in Abhängigkeit vom Abstand r kann durch das Morse-Potential beschrieben werden:

$$U(r) = U_0 \left[e^{-(r-r_0)/a} - 1\right]^2 - U_0 \ ,$$

wobei r_0, a und U_0 Konstanten sind. Bestimmen Sie die Kreisfrequenz der kleinen Schwingungen um den Ruhezustand.

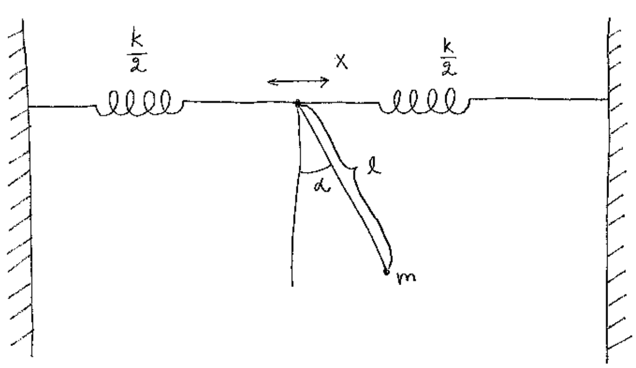
Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen des ebenen Doppelpendels aus Aufgabe 1b von Blatt 3, d.h. mit der Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\, l_1^2\, \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2\, l_2^2\, \dot\varphi_2^2 + m_2\, l_1 l_2\, \dot\varphi_1\dot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ &+ (m_1+m_2)\, g\, l_1 \cos\varphi_1 + m_2\, g\, l_2 \cos\varphi_2 \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Ein Pendel (Länge ℓ) sei zwischen zwei Federn abgehängt (Federkonstanten $k/2$, siehe Skizze unten). Der Abhangpunkt kann sich nur in horizontale Richtung bewegen.

(a) Ermitteln Sie die Lagrange-Funktion und die entsprechenden Bewegungsgleichungen, indem Sie α und x als verallgemeinerte Koordinaten verwenden.

(b) Zeigen Sie, dass falls die Schwingungen klein sind, das System äquivalent zu einem normalen Pendel ist, und zwar einem von der Länge $\ell + mg/k$.



Exercises to Mechanics II	**Sheet 5**

Exercise 1: A homogeneous full cylinder and a homogeneous full sphere with radius R and mass M roll down a slope of length l and inclination φ. Determine the relevant moment of inertia, write down the Lagrangian and the equation of motion, and determine the duration of the rolling-down. Compare with how fast a body sliding down the slope without friction completes the process.

Exercise 2: The electric potential of a two-atomic molecule, with the inter-atomic distance r, can be modelled by the Morse potential,

$$U(r) = U_0 \left[e^{-(r-r_0)/a} - 1\right]^2 - U_0 \,,$$

where r_0, a and U_0 are constants. Determine the angular frequencies of small oscillations around the rest position.

Exercise 3: Determine the angular eigenfrequencies of the double pendulum from Exercise 1b of Sheet 3, i.e. with the Lagrangian

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\, l_1^2\, \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2\, l_2^2\, \dot\varphi_2^2 + m_2\, l_1 l_2\, \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &+ \ (m_1+m_2)\, g\, l_1 \cos\varphi_1 + m_2\, g\, l_2 \cos\varphi_2 \,. \end{aligned}$$

Exercise 4: A pendulum (length ℓ) is hanging between two springs (spring constants $k/2$, see below). The hanging point can move only horizontally.

(a) Determine the Lagrangian and the corresponding equation of motion, by adopting α and x as generalized coordinates.

(b) Show that if the oscillations are small, the system is equivalent to a normal pendulum, of length $\ell + mg/k$.